

四元数とその初等関数・逆関数を扱うための準備

山田 泰司 <taiji@aihara.co.jp>
株式会社あいはら 研究開発チーム

2011年8月2日

1 boost quaternion テンプレートライブラリの拡張

四元数を扱うための数式処理または数値計算ツールとして Mathematica や Matlab 向けのサードパーティのツールボックスがあげられるが、なんと、オープンソースの、あの boost C++ ライブラリでも四元数を扱ってしまうので、ここでは、boost quaternion テンプレートライブラリを利用するものとする。

しかし、この実装であるソースコード quaternion.hpp には以下の初等関数とその逆関数が未実装なので、数値計算にあたり些か不都合である。

- pow(q,p): 冪関数
- sqrt(q): 平方根
- log(q): 対数関数
- acos(q): 逆余弦関数
- asin(q): 逆正弦関数
- atan(q): 逆正接関数
- acosh(q): 双曲線逆余弦関数
- asinh(q): 双曲線逆正弦関数
- atanh(q): 双曲線逆正接関数

よって、これに独自のパッチを当ててこれらを利用できるようにする。それに先立ち、四元数の初等関数とその逆関数の導出を行なう。

2 四元数のその初等関数・逆関数

四元数 $q = a + bi + cj + dk$, $q \in \mathbb{H}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ において、単位ベクトル i, j, k は以下の性質をもつ。

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \tag{1}$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \tag{2}$$

また、四元数の共役 \bar{q} 、絶対値 $|q|$ 、逆元 q^{-1} を以下のように定義する。

$$\bar{q} = a - (bi + cj + dk), \quad (3)$$

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{q\bar{q}}, \quad (4)$$

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}. \quad (5)$$

ここでは、四元数の初等関数を実数の初等関数で実装するための導出を行なう。
四元数におけるオイラーの公式を求めるために、以下のテーラー展開を用いる。

$$e^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} q^n, \quad (6)$$

$$\cos q = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} q^{2n}, \quad (7)$$

$$\sin q = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} q^{2n+1} \quad (8)$$

まず、これらの q に $\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w$ を代入すると以下のオイラーの公式が得られる。

$$e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} = \cos(w) + \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \sin(w) \quad (9)$$

また、これらの q に $-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w$ を代入すると以下の関係式も得られる。

$$e^{-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} = \cos(w) - \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \sin(w) \quad (10)$$

ここでは、以下の性質を用いている。

$$\left(\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \right)^2 = \frac{(bi+cj+dk)^2}{b^2+c^2+d^2} = \frac{-(b^2+c^2+d^2)}{b^2+c^2+d^2} = -1$$

よって、余弦関数と正弦関数が指数関数により以下のように表せる。

$$\cos(w) = \frac{e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} + e^{-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w}}{2}, \quad (11)$$

$$\sin(w) = \frac{e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} - e^{-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w}}{2 \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}. \quad (12)$$

次に w に $\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w$ を代入すると指数関数を介して三角関数と双曲線関数の関係式が得られる。

$$\cos \left(\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w \right) = \frac{e^{-w} + e^w}{2} = \cosh(w), \quad (13)$$

$$\sin \left(\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w \right) = \frac{e^{-w} - e^w}{2 \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}} = -\frac{1}{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}} \sinh(w) = \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \sinh(w). \quad (14)$$

ここでは、以下の性質を用いている。

$$\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}(bi+cj+dk) = \frac{(bi+cj+dk)^2}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} = \frac{-(b^2+c^2+d^2)}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} = -\sqrt{b^2+c^2+d^2}$$

そこで、三角関数と双曲線関数の関係式において、 $w = |bi + cj + dk|$ と見なすと、

$$\begin{aligned}\cosh(|bi + cj + dk|) &= \cos\left(\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}|bi + cj + dk|\right) \\ &= \cos(bi + cj + dk),\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sinh(|bi + cj + dk|) &= \sin\left(\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}|bi + cj + dk|\right) \\ &= \sin(bi + cj + dk),\end{aligned}\tag{16}$$

の変換式が得られ、また $w = bi + cj + dk$ と見なすと、

$$\begin{aligned}\cosh(bi + cj + dk) &= \cos\left(\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}(bi + cj + dk)\right) \\ &= \cos(-|bi + cj + dk|),\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}\sinh(bi + cj + dk) &= -\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sin\left(\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}(bi + cj + dk)\right) \\ &= -\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sin(-|bi + cj + dk|).\end{aligned}\tag{18}$$

の変換式が得られる。よって、加法定理により以下の余弦関数、正弦関数、双曲線余弦関数、双曲線正弦関数の、実数による初等関数との関係式が得られる。

$$\begin{aligned}\cos(q) &= \cos(a + bi + cj + dk) \\ &= \cos(a) \cos(bi + cj + dk) - \sin(a) \sin(bi + cj + dk) \\ &= \cos(a) \cosh(|bi + cj + dk|) - \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sin(a) \sinh(|bi + cj + dk|)\end{aligned}\tag{19}$$

$$= \cos(a) \cosh(|bi + cj + dk|) - (bi + cj + dk) \sin(a) \frac{\sinh(|bi + cj + dk|)}{|bi + cj + dk|},\tag{20}$$

$$\begin{aligned}\sin(q) &= \sin(a + bi + cj + dk) \\ &= \sin(a) \cos(bi + cj + dk) + \cos(a) \sin(bi + cj + dk) \\ &= \sin(a) \cosh(|bi + cj + dk|) + \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \cos(a) \sinh(|bi + cj + dk|)\end{aligned}\tag{21}$$

$$= \sin(a) \cosh(|bi + cj + dk|) + (bi + cj + dk) \cos(a) \frac{\sinh(|bi + cj + dk|)}{|bi + cj + dk|},\tag{22}$$

$$\begin{aligned}\cosh(q) &= \cosh(a + bi + cj + dk) \\ &= \cosh(a) \cosh(bi + cj + dk) + \sinh(a) \sinh(bi + cj + dk) \\ &= \cosh(a) \cos(-|bi + cj + dk|) - \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sinh(a) \sin(-|bi + cj + dk|)\end{aligned}\tag{23}$$

$$= \cosh(a) \cos(|bi + cj + dk|) + (bi + cj + dk) \sinh(a) \frac{\sin(|bi + cj + dk|)}{|bi + cj + dk|},\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\sinh(q) &= \sinh(a + bi + cj + dk) \\ &= \sinh(a) \cosh(bi + cj + dk) + \cosh(a) \sinh(bi + cj + dk) \\ &= \sinh(a) \cos(-|bi + cj + dk|) - \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \cosh(a) \sin(-|bi + cj + dk|)\end{aligned}\tag{25}$$

$$= \sinh(a) \cos(|bi + cj + dk|) + (bi + cj + dk) \cosh(a) \frac{\sin(|bi + cj + dk|)}{|bi + cj + dk|}.\tag{26}$$

ここでは、以下の性質を用いている。

$$\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} |bi + cj + dk| = \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = bi + cj + dk \quad (27)$$

よって、正接関数、双曲線正接関数は以上の結果を利用して以下の通りでよい。

$$\tan(q) = \frac{\sin(q)}{\cos(q)} \quad (28)$$

$$\tanh(q) = \frac{\sinh(q)}{\cosh(q)}. \quad (29)$$

さらに、オイラーの公式にて $w = |bi + cj + dk|$ と見なせば以下の指数関数の、実数による初等関数との関係式が得られる。

$$e^q = e^{a+bi+cj+dk} = e^a e^{bi+cj+dk} = e^a \left(\cos(|bi + cj + dk|) + \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sin(|bi + cj + dk|) \right). \quad (30)$$

ところで先の双曲線関数は指数関数との関係から w に q を代入して、この指数関数を用いて以下のように得てもよい。

$$\cosh(q) = \frac{e^q + e^{-q}}{2}, \quad (31)$$

$$\sinh(q) = \frac{e^q - e^{-q}}{2}. \quad (32)$$

さらに、対数関数はその主値に関して以下のように表される。

$$\log(q) = \log(|q|) + \frac{bi + cj + dk}{|bi + cj + dk|} \operatorname{atan} \left(\frac{|bi + cj + dk|}{a} \right) \quad (33)$$

オイラーの公式を「補遺 B」のように解いて、この対数関数を用いると、以下のように四元数における三角関数、双曲線関数の逆関数を求める事ができる。

$$\begin{aligned} \operatorname{acos}(q) &= \frac{1}{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}} \log \left(q \pm \sqrt{q^2 - 1} \right) \\ &= -\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \log \left(q \pm \sqrt{q^2 - 1} \right) \\ &= -\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \log \left(q \pm \sqrt{\left(\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \right)^2 (1 - q^2)} \right) \\ &= -\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \log \left(q \pm \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sqrt{1 - q^2} \right), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{asin}(q) &= \frac{1}{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}} \log \left(q \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \pm \sqrt{1 - q^2} \right) \\ &= -\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \log \left(q \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \pm \sqrt{1 - q^2} \right), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{atan}(q) &= \frac{1}{2 \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}} \log \left(\left(1 - q \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \right)^{-1} \left(1 + q \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \log \left(\left(1 - q \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \right)^{-1} \left(1 + q \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \right) \right), \end{aligned} \quad (36)$$

$$(37)$$

$$\operatorname{acosh}(q) = \log \left(q \pm \sqrt{q^2 - 1} \right), \quad (38)$$

$$\operatorname{asinh}(q) = \log \left(q \pm \sqrt{q^2 + 1} \right), \quad (39)$$

$$\operatorname{atanh}(q) = \frac{1}{2} \log \left(\pm (1 - q)^{-1} (1 + q) \right). \quad (40)$$

以上の符合に関する多価関数の取扱いに加えて、用いられている対数関数がそもそも多価関数であるため、数値計算上の実装には注意を要する。どれを主値と見なすかは、複素数における実装との互換性に配慮する事を考えるものとする。

ところで、もしくは以上の結果を利用して、簡易に以下の逆双曲線関数から逆三角関数への変換する手続きを採用する事も考えられるが、ここでは採用しない。

$$\operatorname{acos}(q) = -\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \operatorname{acosh}(q), \quad (41)$$

$$\operatorname{asin}(q) = -\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \operatorname{asinh} \left(q \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \right), \quad (42)$$

$$\operatorname{atan}(q) = -\frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \operatorname{atanh} \left(q \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \right), \quad (43)$$

同様に、もしくは以上の結果を利用して、簡易に以下の逆三角関数から逆双曲線関数への変換する手続きを採用する事も考えられるが、ここでは採用しない。

$$\operatorname{acosh}(q) = \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \operatorname{acos}(q), \quad (44)$$

$$\operatorname{asinh}(q) = \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \operatorname{asin} \left(-q \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \right), \quad (45)$$

$$\operatorname{atanh}(q) = \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \operatorname{atan} \left(-q \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \right), \quad (46)$$

ちなみに、四元数の冪関数は以下のように定義できる。

$$q^p = e^{p \log q} \quad (47)$$

また、四元数冪関数は以下のように定義できる。

$$p^q = e^{q \log p} \quad (48)$$

定義から、四元数の平方根は以下のように求める。

$$\sqrt{q} = q^{\frac{1}{2}} \quad (49)$$

以上の結果を用いて、四元数の初等関数とその逆関数の数値計算が実装できるようになる。

3 boost quaternion 及びその独自の拡張における実装

では、boost quaternion において、またここで独自に拡張した実装において、以上の結果がどのように用いられているか解説する。

- $\exp(q)$: 指数関数 — 式 (30) を用いて実装されている。特筆すべきは、数値誤差に配慮したカーディナル正弦関数 $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ を用意して、それを利用している事である。ゆえに、前述の他の導出でも $\operatorname{sinc}(x)$ を積極的に使うように配慮してある。

- $\cos(q)$: 余弦関数 — 式 (20) を用いて実装されている。同様に $\text{sinc}(x)$ を利用している。
- $\sin(q)$: 正弦関数 — 式 (22) を用いて実装されている。同様に $\text{sinc}(x)$ を利用している。
- $\tan(q)$: 正接関数 — 式 (28) を用いて実装されている。
- $\cosh(q)$: 双曲線余弦関数 — 式 (24) ではなく式 (31) を用いて実装されている。
- $\sinh(q)$: 双曲線正弦関数 — 式 (26) ではなく式 (32) を用いて実装されている。
- $\tanh(q)$: 双曲線正接関数 — 式 (29) を用いて実装されている。
- $\text{pow}(q,p)$: 冪関数 — p が整数の場合のみ、乗除により実装されている。その他の場合において式 (47) で実装した。
- $\text{pow}(p,q)$: 四元数冪関数 — これは未実装
- $\text{sqrt}(q)$: 平方根 — 式 (49) で実装した。
- $\log(q)$: 対数関数 — 式 (33) で実装した。但し、 $|bi + cj + dk|$ が 0 の場合について配慮してある。
- $\text{acos}(q)$: 逆余弦関数 — 式 (34) で実装した。但し、複素数における数値計算結果との互換性のため符合を工夫してある。
- $\text{asin}(q)$: 逆正弦関数 — 式 (35) で実装した。符合についても同様。
- $\text{atan}(q)$: 逆正接関数 — 式 (36) で実装した。但し、特異点や複素数における数値計算結果との互換性のため工夫してある。
- $\text{acosh}(q)$: 双曲線逆余弦関数 — 式 (38) で実装した。
- $\text{asinh}(q)$: 双曲線逆正弦関数 — 式 (39) で実装した。
- $\text{atanh}(q)$: 双曲線逆正接関数 — 式 (40) で実装した。但し、特異点や複素数における数値計算結果との互換性のため工夫してある。

4 様々な関数を可視化

最後に様々な関数を組み込みの複素数と boost quaternion テンプレートライブラリ及びその拡張による四元数で数値計算した結果を可視化して終る。

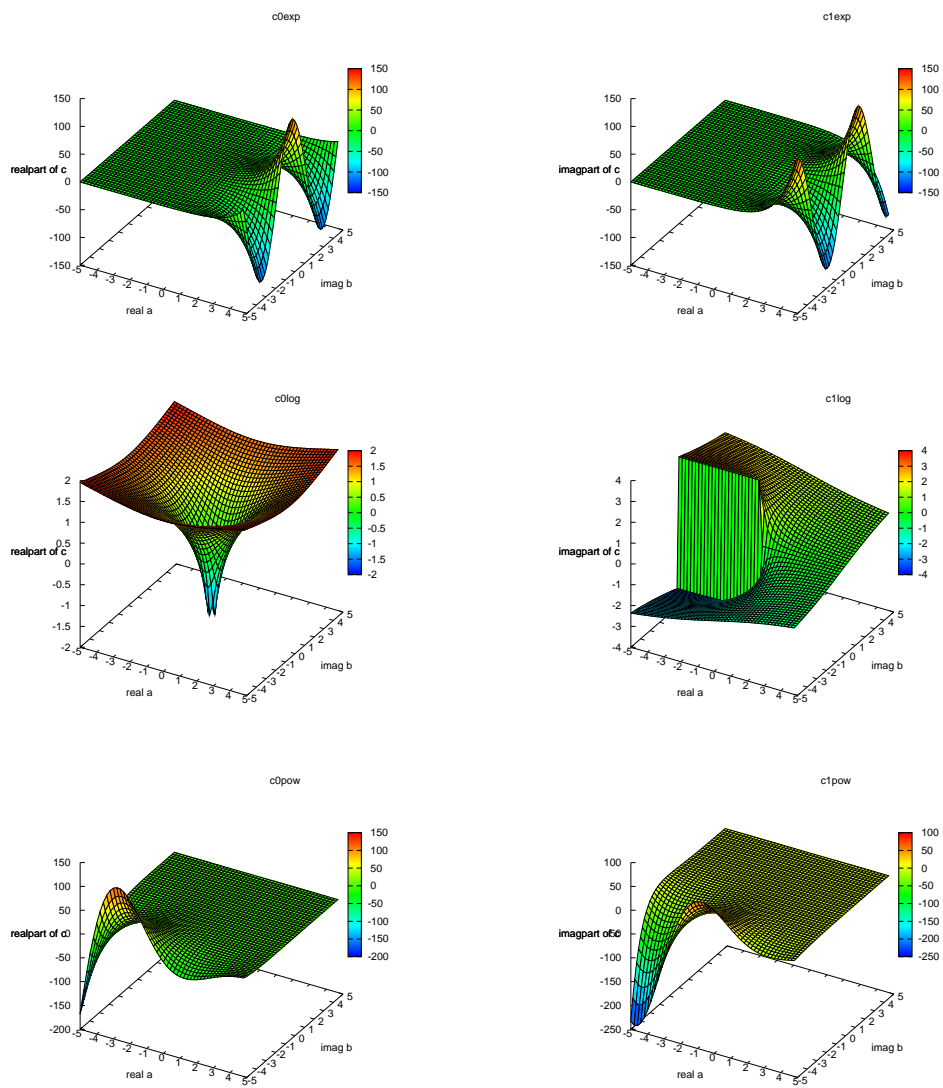


図1 複素数の exp, log, pow

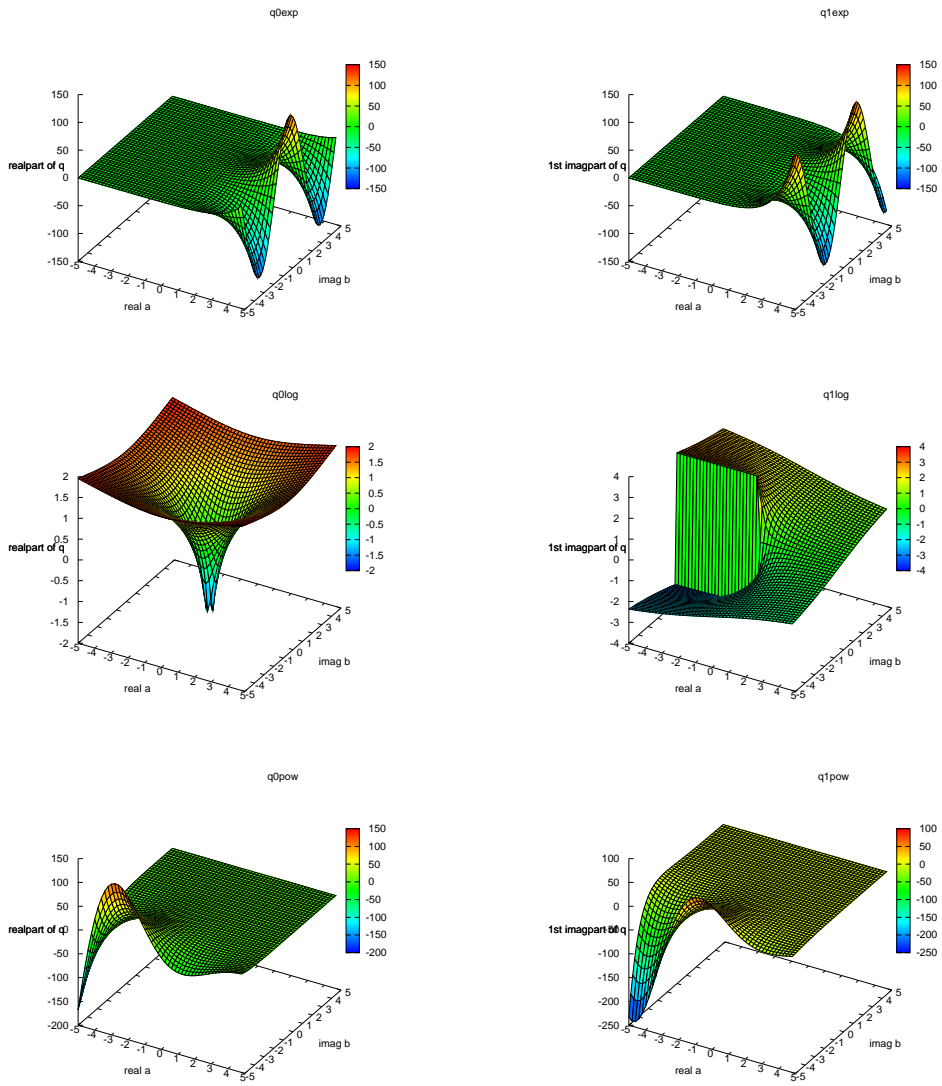


図2 四元数の exp, log, pow

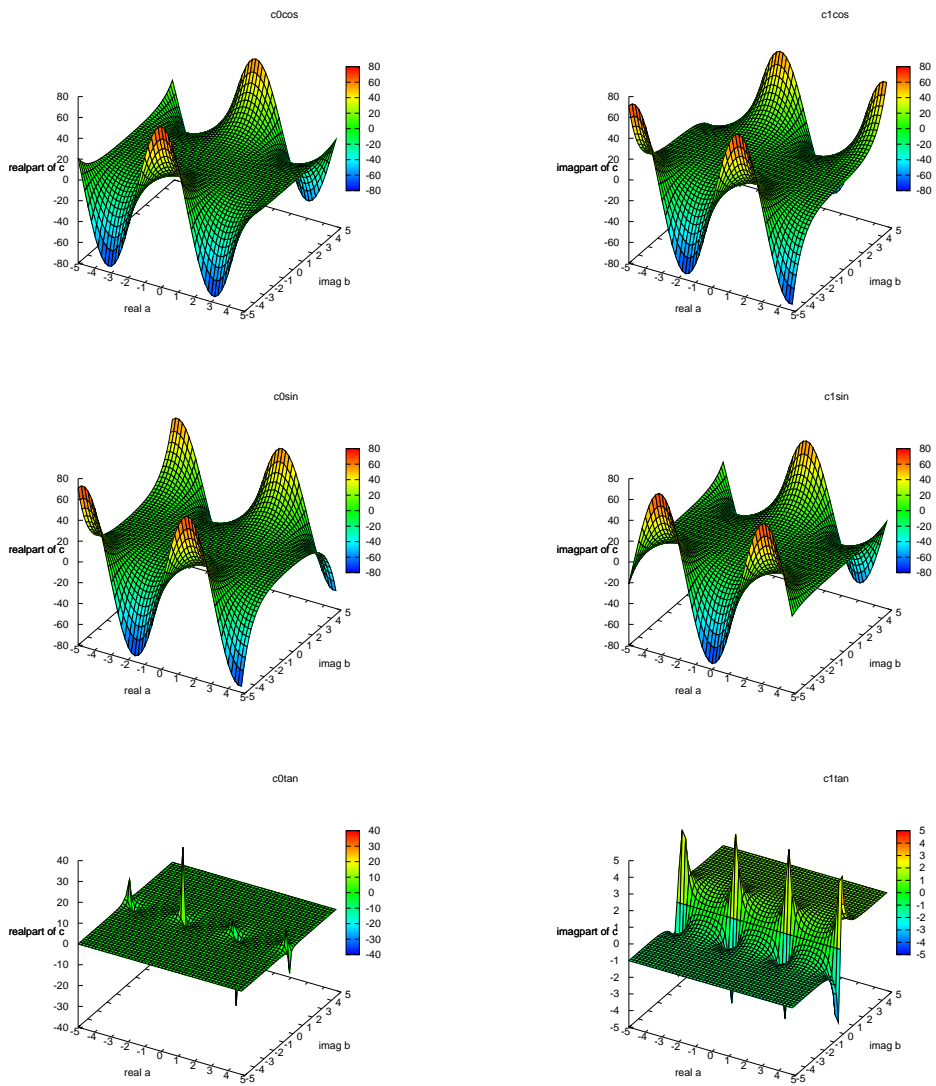


図3 複素数の cos, sin, tan

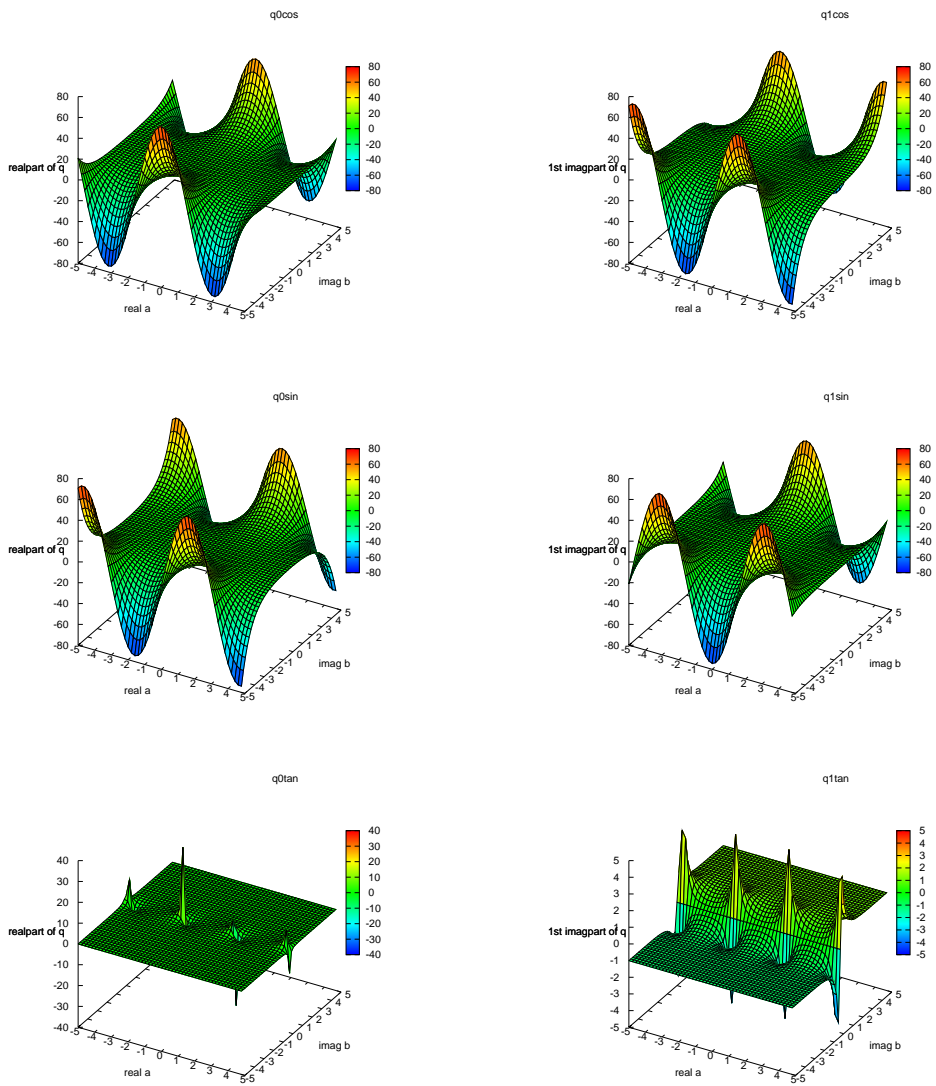


図4 四元数の cos, sin, tan

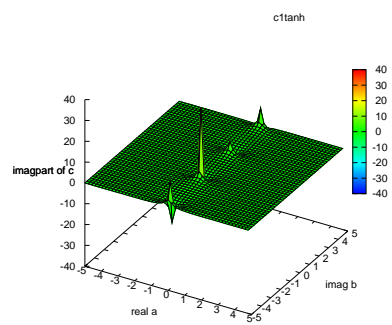
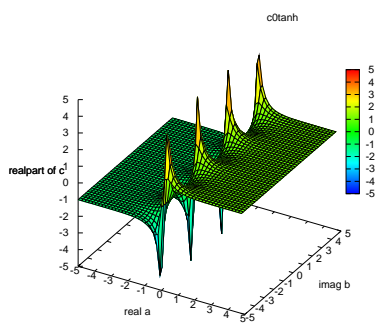
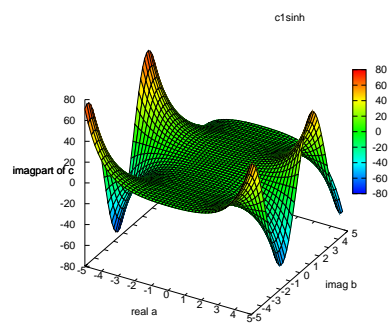
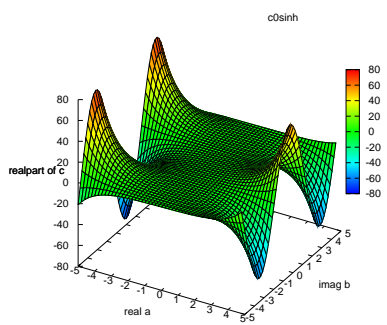
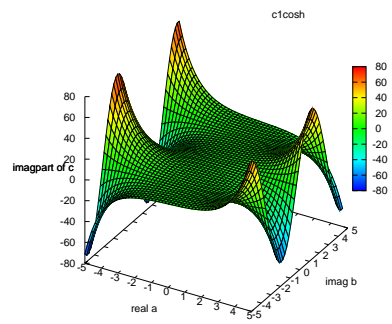
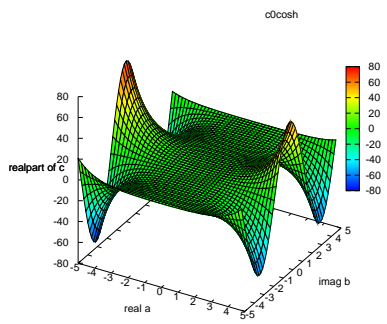


図5 複素数の cosh, sinh, tanh

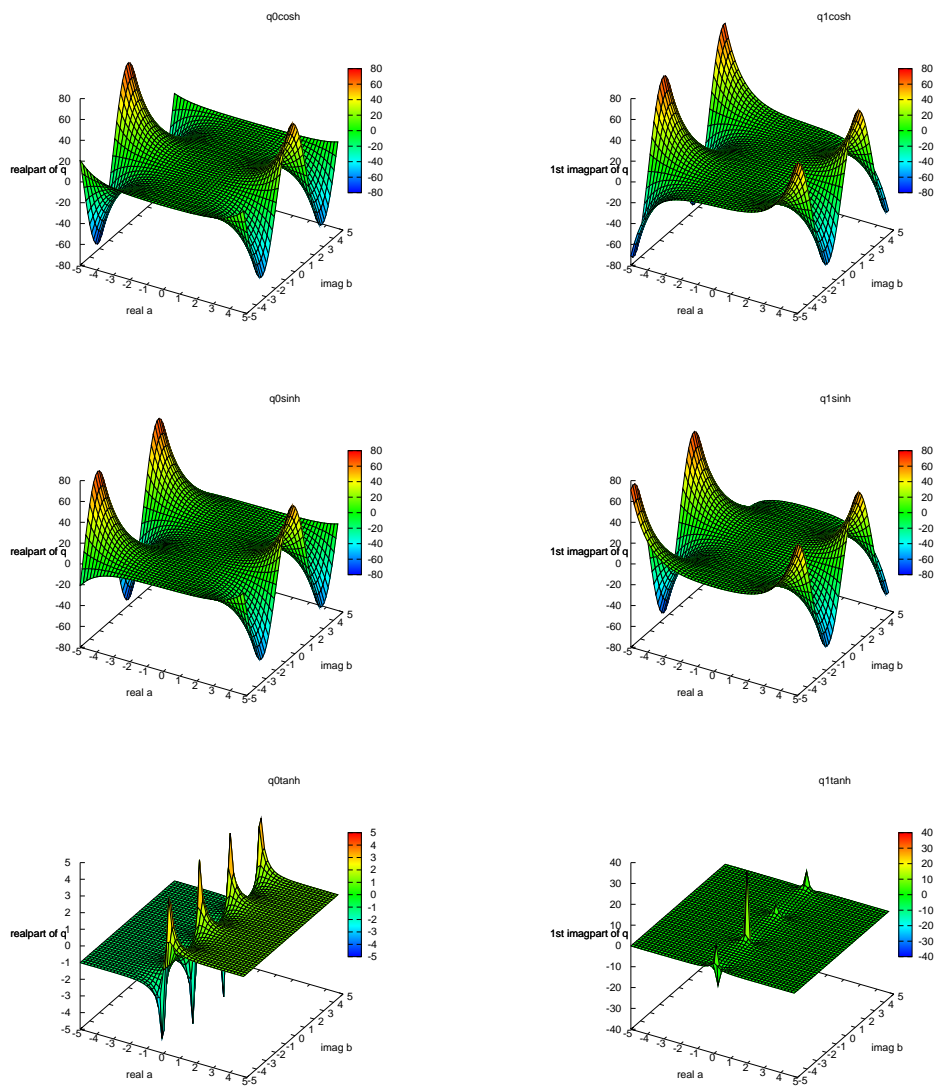


図6 四元数の cosh, sinh, tanh

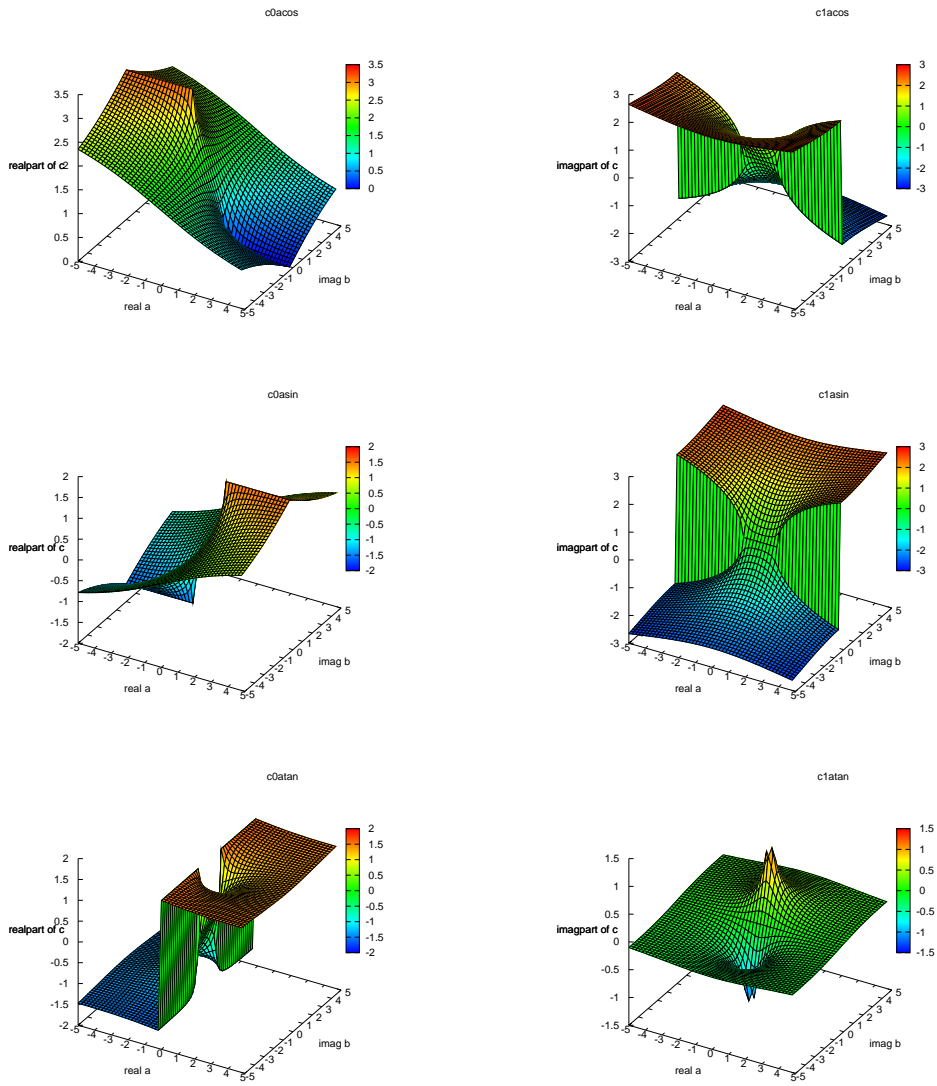


図7 複素数の acos , asin , atan

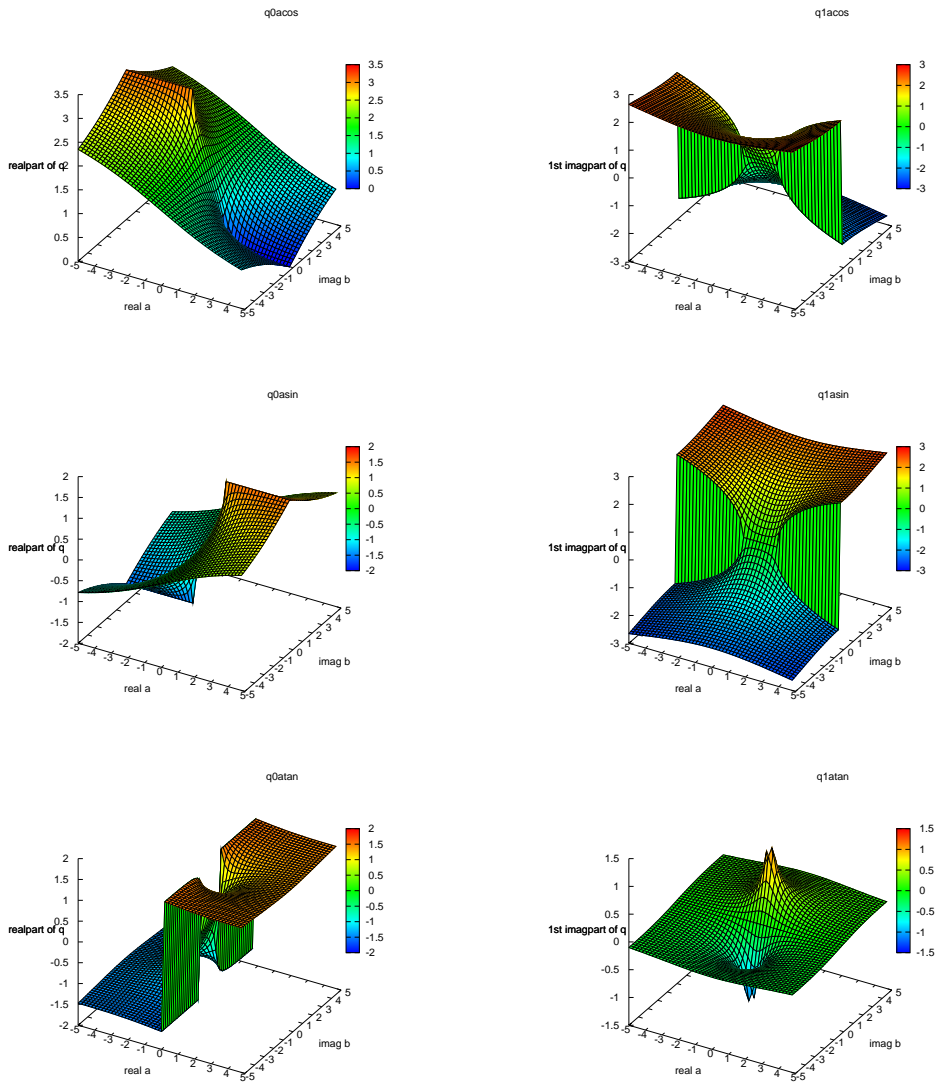


図 8 四元数の acos, asin, atan

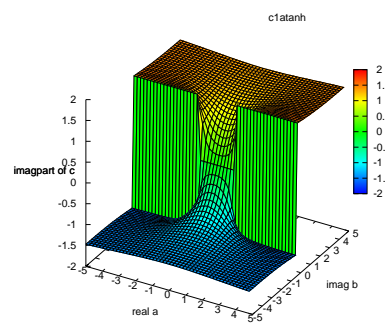
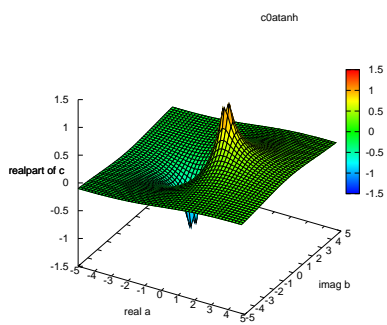
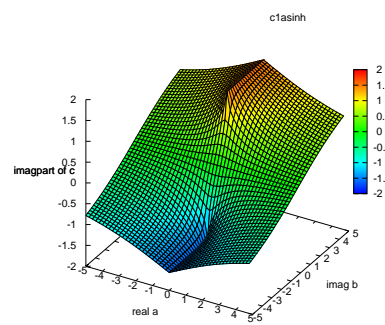
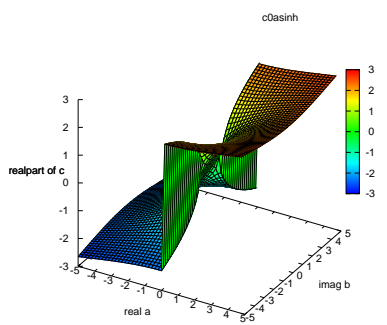
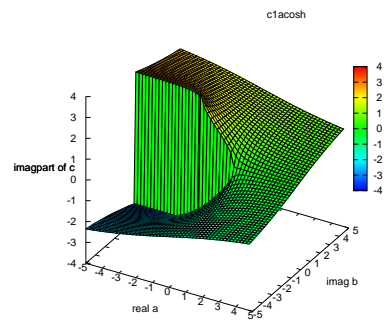
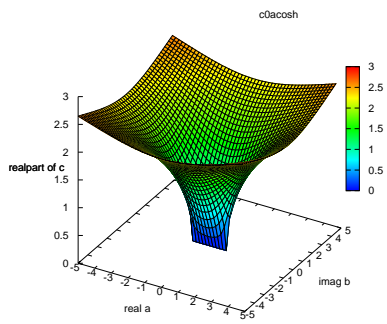


図 9 複素数の acosh, asinh, atanh

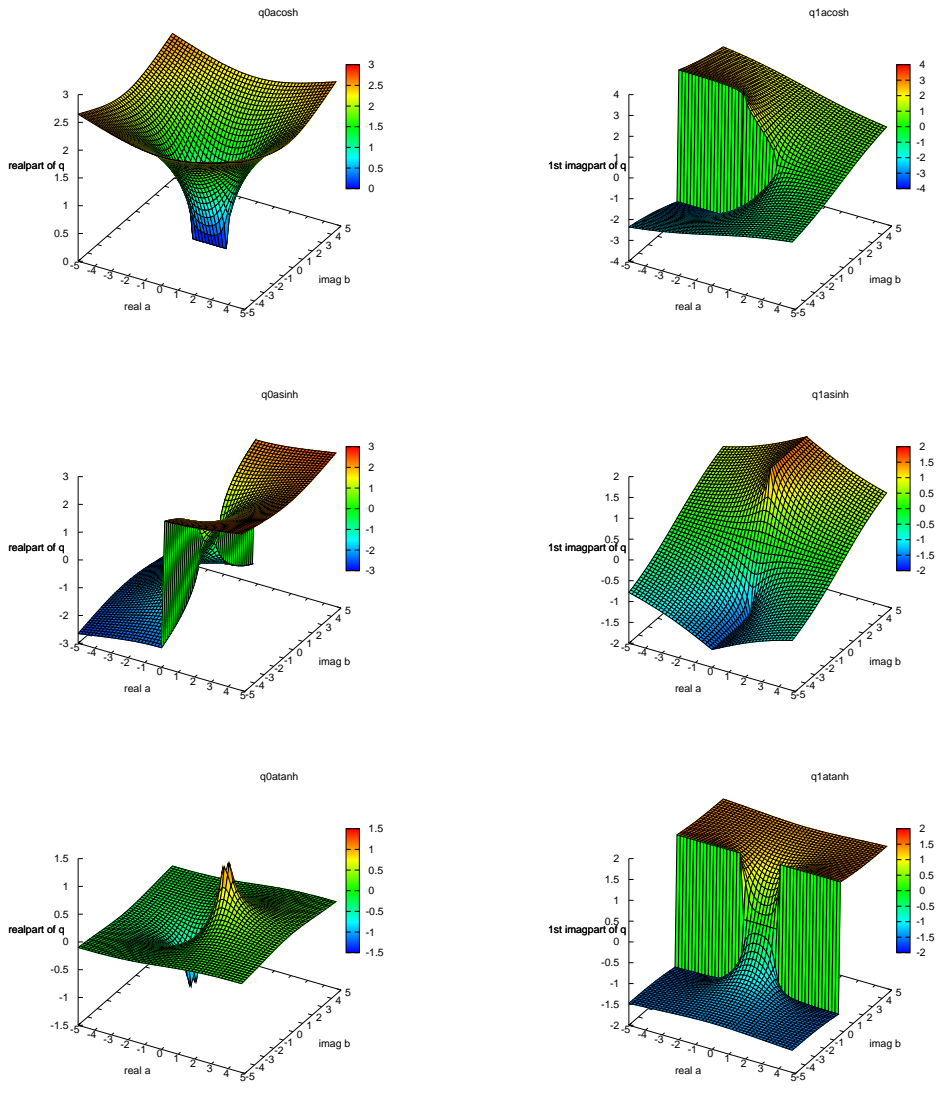


図 10 四元数の acosh, asinh, atanh

5 補遺 A

boost には八元数のための octonion.hpp も提供されている。ここで解説した独自のパッチでは、その boost octonion テンプレートライブラリにも同様の拡張を施している。

八元数 $o = a + bi_0 + ci_1 + di_2 + ei_3 + fi_4 + gi_5 + hi_6$, $o \in \mathbb{O}$, $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$ において、単位ベクトル $i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$ は、 $i_j, j \in \mathbb{Z}, j \equiv j \pmod{7}$ として以下の性質をもつ。

$$i_n^2 = -1, \quad (50)$$

$$i_{n+1}i_{n+2} = -i_{n+2}i_{n+1} = i_{n+4}, \quad i_{n+2}i_{n+4} = -i_{n+4}i_{n+2} = i_{n+1}, \quad i_{n+4}i_{n+1} = -i_{n+1}i_{n+4} = i_{n+2} \quad (51)$$

また、八元数の共役 \bar{o} 、絶対値 $|o|$ 、逆元 o^{-1} を以下のように定義する。

$$\bar{o} = a - (bi_0 + ci_1 + di_2 + ei_3 + fi_4 + gi_5 + hi_6), \quad (52)$$

$$|o| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2} = \sqrt{o\bar{o}}, \quad (53)$$

$$o^{-1} = \frac{\bar{o}}{|o|^2}. \quad (54)$$

以下の性質を用いると、四元数の議論と同様に八元数の初等関数とその逆関数を求める事ができる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{bi_0 + ci_1 + di_2 + ei_3 + fi_4 + gi_5 + hi_6}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2}} \right)^2 &= \frac{(bi_0 + ci_1 + di_2 + ei_3 + fi_4 + gi_5 + hi_6)^2}{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2} = \\ &= \frac{-(b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)}{b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2} = -1 \end{aligned}$$

なぜなら、

$$(bi_0 + ci_1 + di_2 + ei_3 + fi_4 + gi_5 + hi_6)^2 = -(b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2) \quad (55)$$

であるからである。

boost quaternion, octonion テンプレートライブラリ への拡張に関するパッチは <http://www.aihara.co.jp/~taiji/tp/?id=16> にて配布している。

6 補遺 B

6.1 acosh の導出

$q = \cosh(w) = \frac{e^w + e^{-w}}{2}$ において w について解くと、

$$\begin{aligned} 2q &= e^w + e^{-w}, \\ 2q(e^w) &= (e^w)^2 + 1, \\ (e^w)^2 - 2q(e^w) + 1 &= 0, \end{aligned}$$

二次方程式の解の公式より

$$e^w = \frac{2q \pm \sqrt{(2q)^2 - 4}}{2} = q \pm \sqrt{q^2 - 1},$$

よって、

$$w = \log \left(q \pm \sqrt{q^2 - 1} \right) = \operatorname{acosh}(q)$$

6.2 asinh の導出

$q = \sinh(w) = \frac{e^w - e^{-w}}{2}$ において w について解くと、

$$\begin{aligned} 2q &= e^w - e^{-w}, \\ 2q(e^w) &= (e^w)^2 - 1, \\ (e^w)^2 - 2q(e^w) - 1 &= 0, \end{aligned}$$

二次方程式の解の公式より

$$e^w = \frac{2q \pm \sqrt{(2q)^2 + 4}}{2} = q \pm \sqrt{q^2 + 1},$$

よって、

$$w = \log \left(q \pm \sqrt{q^2 + 1} \right) = \operatorname{asinh}(q)$$

6.3 atanh の導出

$q = \tanh(w) = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$ において w について解くと、

$$\begin{aligned} qe^w + qe^{-w} &= e^w - e^{-w}, \\ q(e^w)^2 + q &= (e^w)^2 - 1, \\ (1 - q)(e^w)^2 &= q + 1, \\ (e^w)^2 &= (1 - q)^{-1}(q + 1), \\ e^w &= \pm \sqrt{(1 - q)^{-1}(q + 1)}, \end{aligned}$$

よって、

$$w = \log \left(\pm \sqrt{(1 - q)^{-1}(q + 1)} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\pm (1 - q)^{-1}(q + 1) \right) = \operatorname{atanh}(q)$$

6.4 acos の導出

$q = \cos(w) = \frac{e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} + e^{-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w}}{2}$ において w について解くと、

$$\begin{aligned} 2q &= e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} + e^{-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w}, \\ 2q \left(e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} \right) &= \left(e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} \right)^2 + 1, \\ \left(e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} \right)^2 - 2q \left(e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} \right) + 1 &= 0, \end{aligned}$$

二次方程式の解の公式より

$$e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} = \frac{2q \pm \sqrt{4q^2 - 4}}{2} = q \pm \sqrt{q^2 - 1},$$

よって、

$$w = \frac{1}{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}} \log \left(q \pm \sqrt{q^2 - 1} \right) = \operatorname{acos}(q)$$

6.5 asin の導出

$$q = \sin(w) = \frac{e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} - e^{-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w}}{2 \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}} \text{ において } w \text{ について解くと、}$$

$$\begin{aligned} 2q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} &= e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} - e^{-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w}, \\ 2q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \left(e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} \right) &= \left(e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} \right)^2 - 1, \\ \left(e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} \right)^2 - 2q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \left(e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} \right) - 1 &= 0, \end{aligned}$$

二次方程式の解の公式より

$$e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} = \frac{2q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \pm \sqrt{4 \left(q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \right)^2 + 4}}{2} = q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \pm \sqrt{1 - q^2},$$

よって、

$$w = \frac{1}{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}} \log \left(q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \pm \sqrt{1 - q^2} \right) = \operatorname{asin}(q)$$

6.6 atan の導出

$$q = \tan(w) = \frac{e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} - e^{-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w}}{e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} + e^{-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w}} \frac{1}{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}} \text{ において } w \text{ について解くと,}$$

$$q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} = \frac{e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} - e^{-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w}}{e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} + e^{-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w}},$$

$$q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} + q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} e^{-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} = e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} - e^{-\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w},$$

$$q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \left(e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} \right)^2 + q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} = \left(e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} \right)^2 - 1,$$

$$\left(1 - q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \right) \left(e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} \right)^2 = 1 + q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}},$$

$$\left(e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} \right)^2 = \left(1 - q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \right)^{-1} \left(1 + q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \right),$$

$$e^{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}w} = \pm \sqrt{\left(1 - q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \right)^{-1} \left(1 + q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \right)},$$

よって、

$$w = \frac{1}{\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}} \log \left(\pm \sqrt{\left(1 - q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \right)^{-1} \left(1 + q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \right)} \right) =$$

$$\frac{1}{2 \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}} \log \left(\pm \left(1 - q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \right)^{-1} \left(1 + q \frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \right) \right) = \text{atan}(q)$$

7 補遺 C

7.1 boost complex での実装

7.1.1 acos の実装

文献 [6] の疑似コードを実装している。

7.1.2 asin の実装

文献 [6] の疑似コードを実装している。

7.1.3 atan の実装

C99 における定義を用いている。atan(z) = -iatanh(iz) 但し、ℑz = 1 のとき 0 + i∞、ℑz = -1 のとき 0 - i∞ とする。

7.1.4 acosh の実装

C99 と互換性のよい実装を用いている。acosh(z) = ±iacos(z) ここで符号は、ℑz ≤ 0 以外のときマイナスである。

7.1.5 asinh の実装

C99 における定義と一致する実装を用いている。 $\operatorname{asinh}(z) = i \operatorname{asin}(-iz)$

7.1.6 atanh の実装

文献 [7]などを参考に実装している。

参考文献

- [1] W. R. Hamilton, “Researches Respecting Quaternions: First Series,” Transactions of the Royal Irish Academy, vol. 21, part 1, pp. 199–296, 1848.
- [2] 堀 源一郎, “ハミルトンと四元数,” 海銘社, 2007.
- [3] J. H. コンウェイ, D. A. スミス (著), 山田 修司 (訳), “四元数と八元数,” 培風館, 2006.
- [4] Hubert Holin, “Boost.Quaternions,”
http://www.boost.org/doc/libs/1_45_0/libs/math/doc/quaternion/html/, 2001-2003.
- [5] Hubert Holin, “Boost.Octonions,”
http://www.boost.org/doc/libs/1_45_0/libs/math/doc/octonion/html/, 2001-2003.
- [6] T. E. Hull, Thomas F. Fairgrieve & Ping Tak Peter Tang, “Implementing the Complex Arcsine and Arccosine Functions using Exception Handling,” ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 23, No. 3, 1997.
- [7] Eric W. Weisstein, “Inverse Hyperbolic Tangent,” From MathWorld — A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/InverseHyperbolicTangent.html>