Mechanics of Chaos Man

— カオス人形のしくみ —

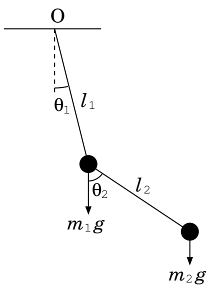
株式会社あいはら 研究開発チーム　山田 泰司

1996 年 4 月 20 日 初版
2003 年 10 月 30 日 第二版
2004 年 3 月 15 日 第三版

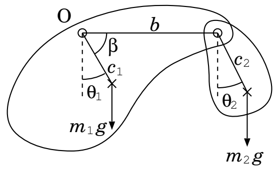
はじめに

ここでは、以下の 5 種類の振り子について、それらのラグランジュ運動方程式をたて、さらに連立の 1 階常微分方程式まで導出する。

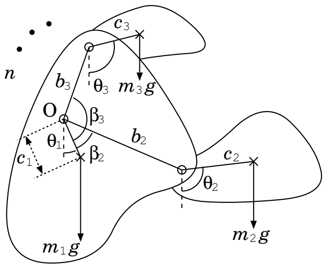
1. **Double Pendulum** — 2 重振り子



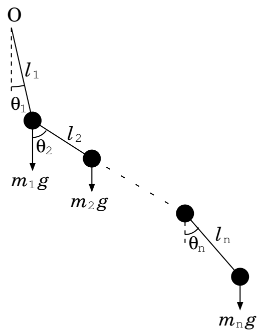
2. **Double Rigid Pendulum** — 2 重剛体振り子



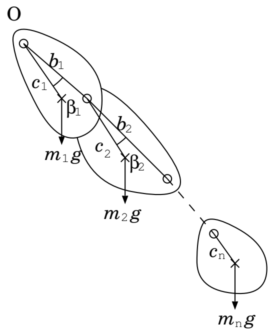
3. **Parallel-Multiple Rigid Pendulum — 並列多重剛体振り子**



4. **Series-Multiple Pendulum — 直列多重振り子**



5. **Series-Multiple Rigid Pendulum — 直列多重剛体振り子**



また、[補足] として、それぞれのハミルトンの正準方程式を導出する。さらに、[発展] として、動座標系として強制振動される場合についても同様に導出する。

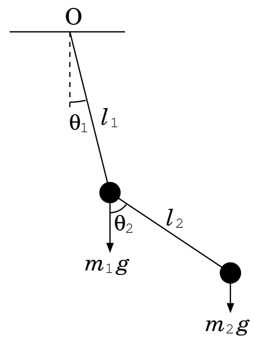
1　2重振り子

(問題) 2 **つのおもりによって構成された** 2 **重振り子** (Double Pendulum) **がある。これらは重力と逆向きの方向を** y **軸とする** xy **平面上で回転運動するものとする。おもり** 1 **は質量** m_1 **で、原点** O **に固定された回転軸** O_1 **から長さ** l_1 **の糸でつるされている。**

もうひとつのおもり 2 **は質量** m_2 **で、おもり** 1 **に固定された回転軸** O_2 **から長さ** l_2 **の糸でつるされている。**

この 2 **重振り子のラグランジュ運動方程式を記述せよ。また、計算機シミュレーションなどをしやすいように、求められた** 2 **階常微分方程式を連立の** 1 **階常微分方程式に変換せよ。**

また、この振り子が各々の角速度に比例する抵抗や外力を受けている場合においても同様に求めよ。



(解答) おもり 1,2 **の** y **軸に対する角度を** θ_1, θ_2 **とする。おもり** 1 **の位置** G_1 **の座標** (x_{G_1}, y_{G_1}) **およびその速度** V_{G_1} **の** 2 **乗は、**

$$
\begin{aligned}
x_{G_1} &= l_1 \sin\theta_1 && (1)\\
y_{G_1} &= -l_1 \cos\theta_1 && (2)\\
V_{G_1}^2 &= \dot{x}_{G_1}^2 + \dot{y}_{G_1}^2 \\
&= (l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1)^2 \\
&= l_1^2\dot{\theta}_1^2 && (3)
\end{aligned}
$$

となる。おもり 2 **の位置** G_2 **の座標** (x_{G_2}, y_{G_2}) **およびその速度** V_{G_2} **の** 2 **乗は、**

$$
\begin{aligned}
x_{G_2} &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 && (4)\\
y_{G_2} &= -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2 && (5)\\
V_{G_2}^2 &= \dot{x}_{G_2}^2 + \dot{y}_{G_2}^2 \\
&= (l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2)^2 \\
&= l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) && (6)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、おもり 1 **の運動エネルギー** T_1 **および位置エネルギー** U_1 **は、**

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}m_1V_{G_1}^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 && (7)\\
U_1 &= m_1gy_{G_1} \\
&= -m_1gl_1\cos\theta_1 && (8)
\end{aligned}
$$

また、おもり 2 **の運動エネルギー** T_2 **および位置エネルギー** U_2 **は、**

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}m_2V_{G_2}^2 \\
&= \frac{1}{2}m_2\left\{l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right\} && (9)\\
U_2 &= m_2gy_{G_2} \\
&= -m_2g\left(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2\right) && (10)
\end{aligned}
$$

となる。この 2 重振り子のラグランジュ関数 L は、

$$
\begin{aligned}
L &= T - U \\
&= (T_1 + T_2) - (U_1 + U_2) \\
&= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_1 g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g \left(l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 \right) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2 \qquad (11)
\end{aligned}
$$

となる。このラグランジュ関数 L から θ_1, θ_2 に関するラグランジュ運動方程式をたてるには、以下の関係式を用いればよい。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= 0
\end{aligned}
$$

これを具体的に求めると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \left(m_1 + m_2 \right) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \left(m_1 + m_2 \right) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \left\{ \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \right\} \qquad (12) \\
- \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \left(m_1 + m_2 \right) g l_1 \sin\theta_1 \qquad (13) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \left\{ \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \right\} \qquad (14) \\
- \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin\theta_2 \qquad (15)
\end{aligned}
$$

ゆえに、θ_1, θ_2 に関するラグランジュ運動方程式は、

$$
\begin{aligned}
\left(m_1 + m_2 \right) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + \left(m_1 + m_2 \right) g l_1 \sin\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \left\{ \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right\} &= 0 \qquad (16) \\
m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \sin\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \left\{ \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right\} &= 0 \qquad (17)
\end{aligned}
$$

となる。 □

ここで、求められた 2 階の微分方程式を連立 1 階微分方程式に直すため、便宜上以下のようにおく。

$$
\begin{aligned}
C &= \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
S &= \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
m_{1,2} &= m_1 + m_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{1,2} l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_{1,2} g l_1 \sin\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \left(C \ddot{\theta}_2 + S \dot{\theta}_2^2 \right) &= 0 \qquad (18) \\
m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \sin\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \left(C \ddot{\theta}_1 - S \dot{\theta}_1^2 \right) &= 0 \qquad (19)
\end{aligned}
$$

上式を整理すると,

$$
\begin{aligned}
m_{1,2} l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 C \ddot{\theta}_2 &= - m_2 l_1 l_2 S \dot{\theta}_2^2 - m_{1,2} g l_1 \sin\theta_1 \\
m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 C \ddot{\theta}_1 &= m_2 l_1 l_2 S \dot{\theta}_1^2 - m_2 g l_2 \sin\theta_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{1,2}l_1^2m_2l_2^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2Cm_2l_2^2\ddot{\theta}_2 &= -m_2l_1l_2Sm_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 - m_{1,2}gl_1\sin\theta_1 m_2l_2^2 \\
m_2^2l_1^2l_2^2C^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2Cm_2l_2^2\ddot{\theta}_2 &= m_2^2l_1^2l_2^2CS\dot{\theta}_1^2 - m_2l_1l_2Cm_2gl_2\sin\theta_2
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$(m_{1,2}l_1^2m_2l_2^2 - m_2^2l_1^2l_2^2C^2)\ddot{\theta}_1 = -m_2l_1l_2Sm_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 - m_2^2l_1^2l_2^2CS\dot{\theta}_1^2 - m_{1,2}gl_1\sin\theta_1 m_2l_2^2 + m_2l_1l_2Cm_2gl_2\sin\theta_2$$

$$
\begin{aligned}
m_{1,2}l_1^2m_2l_1l_2C\ddot{\theta}_1 + m_2^2l_1^2l_2^2C^2\ddot{\theta}_2 &= -m_2^2l_1^2l_2^2CS\dot{\theta}_2^2 - m_{1,2}gl_1\sin\theta_1 m_2l_1l_2C \\
m_{1,2}l_1^2m_2l_1l_2C\ddot{\theta}_1 + m_{1,2}l_1^2m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 &= m_{1,2}l_1^2m_2l_1l_2S\dot{\theta}_1^2 - m_{1,2}l_1^2m_2gl_2\sin\theta_2
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$(m_2^2l_1^2l_2^2C^2 - m_{1,2}l_1^2m_2l_2^2)\ddot{\theta}_2 = -m_2^2l_1^2l_2^2CS\dot{\theta}_2^2 - m_{1,2}l_1^2m_2l_1l_2S\dot{\theta}_1^2 - m_{1,2}gl_1\sin\theta_1 m_2l_1l_2C + m_{1,2}l_1^2m_2gl_2\sin\theta_2$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-m_2l_1l_2Sm_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 - m_2^2l_1^2l_2^2CS\dot{\theta}_1^2 - m_{1,2}gl_1\sin\theta_1 m_2l_2^2 + m_2^2gl_1l_2^2C\sin\theta_2}{m_{1,2}l_1^2m_2l_2^2 - m_2^2l_1^2l_2^2C^2} \tag{20}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-m_2^2l_1^2l_2^2CS\dot{\theta}_2^2 - m_{1,2}l_1^2m_2l_1l_2S\dot{\theta}_1^2 - m_{1,2}m_2gl_1^2l_2C\sin\theta_1 + m_{1,2}l_1^2m_2gl_2\sin\theta_2}{m_2^2l_1^2l_2^2C^2 - m_{1,2}l_1^2m_2l_2^2} \tag{21}$$

となる。さらに、

$$\vartheta_1 = \dot{\theta}_1, \qquad \vartheta_2 = \dot{\theta}_2$$

とおくことにより以下の連立 1 階微分方程式を得る。

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= \vartheta_1 \qquad (22)\\
\dot{\theta}_2 &= \vartheta_2 \qquad (23)\\
\dot{\vartheta}_1 &= \frac{-m_2l_1l_2Sm_2l_2^2\vartheta_2^2 - m_2^2l_1^2l_2^2CS\vartheta_1^2 - m_{1,2}gl_1\sin\theta_1 m_2l_2^2 + m_2^2gl_1l_2^2C\sin\theta_2}{m_{1,2}l_1^2m_2l_2^2 - m_2^2l_1^2l_2^2C^2} \qquad (24)\\
\dot{\vartheta}_2 &= \frac{-m_2^2l_1^2l_2^2CS\vartheta_2^2 - m_{1,2}l_1^2m_2l_1l_2S\vartheta_1^2 - m_{1,2}m_2gl_1^2l_2C\sin\theta_1 + m_{1,2}l_1^2m_2gl_2\sin\theta_2}{m_2^2l_1^2l_2^2C^2 - m_{1,2}l_1^2m_2l_2^2} \qquad (25)
\end{aligned}
$$

□

ちなみに、式 (24), (25) は冗長であるので整理するためにそれぞれ分母分子を $m_2^2l_1l_2^2$, $m_2^2l_1^2l_2$ で割ると、

$$
\begin{aligned}
\dot{\vartheta}_1 &= \frac{g(\sin\theta_2 C - \frac{m_{1,2}}{m_2}\sin\theta_1) - (l_1\vartheta_1^2C + l_2\vartheta_2^2)S}{l_1(\frac{m_{1,2}}{m_2} - C^2)} \\
\dot{\vartheta}_2 &= \frac{g\frac{m_{1,2}}{m_2}(C\sin\theta_1 - \sin\theta_2) + (\frac{m_{1,2}}{m_2}l_1\vartheta_1^2 + l_2\vartheta_2^2C)S}{l_2(\frac{m_{1,2}}{m_2} - C^2)}
\end{aligned}
$$

となる[1]。

[1] これは明らかに文献 [5] の式 (B5), (B6)、文献 [12] の式 (1.3)、文献 [13] の式 (1.12) と等しい。文献 [9] の式 (4C-4)、文献 [11] p.30 の式とは異なっており、おそらくこれらは誤植であると思われる。

また、各々の角速度に比例する抵抗などの減衰や強制振動のような外力がある場合は、$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ それぞれに対する減衰定数を λ_1, λ_2、外力を σ_1, σ_2 とすると、θ_1, θ_2 に関するラグランジュ運動方程式は式 (16),(17) から、

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + (m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \left\{ \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right\} = \sigma_1 - \lambda_1 \dot{\theta}_1 \quad (26)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \sin\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \left\{ \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right\} = \sigma_2 - \lambda_2 \dot{\theta}_2 \quad (27)$$

となる。 □

よって、式 (22)-(25) に対応する減衰や外力がある場合の連立一階微分方程式は以下のようになる。

$$\dot{\theta}_1 = \vartheta_1 \quad (28)$$

$$\dot{\theta}_2 = \vartheta_2 \quad (29)$$

$$\dot{\vartheta}_1 = \frac{\left\{ \begin{array}{l} -m_2 l_1 l_2 S m_2 l_2^2 \vartheta_2^2 - m_2^2 l_1^2 l_2^2 C S \vartheta_1^2 - m_{1,2} g l_1 \sin\theta_1 m_2 l_2^2 + m_2^2 g l_1 l_2^2 C \sin\theta_2 \\ +m_2 l_2^2 \sigma_1 - m_2 l_1 l_2 C \sigma_2 \\ -m_2 l_2^2 \lambda_1 \vartheta_1 + m_2 l_1 l_2 C \lambda_2 \vartheta_2 \end{array} \right\}}{m_{1,2} l_1^2 m_2 l_2^2 - m_2^2 l_1^2 l_2^2 C^2} \quad (30)$$

$$\dot{\vartheta}_2 = \frac{\left\{ \begin{array}{l} -m_2^2 l_1^2 l_2^2 C S \vartheta_2^2 - m_{1,2} l_1^2 m_2 l_1 l_2 S \vartheta_1^2 - m_{1,2} m_2 g l_1^2 l_2 C \sin\theta_1 + m_{1,2} l_1^2 m_2 g l_2 \sin\theta_2 \\ +m_2 l_1 l_2 C \sigma_1 - m_{1,2} l_1^2 \sigma_2 \\ -m_2 l_1 l_2 C \lambda_1 \vartheta_1 + m_{1,2} l_1^2 \lambda_2 \vartheta_2 \end{array} \right\}}{m_2^2 l_1^2 l_2^2 C^2 - m_{1,2} l_1^2 m_2 l_2^2} \quad (31)$$

□

[補足]　ハミルトンの正準方程式の導出

ここで、運動エネルギー T を以下のように表す。

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{32}$$

但しここで、$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$、

$$R = \begin{pmatrix} m_{1,2}l_1^2 & m_2 l_1 l_2 C \\ m_2 l_1 l_2 C & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \tag{33}$$

である。すると、角運動量 $\boldsymbol{p}$ は、$\boldsymbol{p} = R\dot{\boldsymbol{\theta}}$ と表される。ハミルトニアン H は

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p} + U \tag{34}$$

であり、ハミルトニアン H からハミルトンの正準方程式を得るには以下

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p} + U\right) \\
&= R^{-1}\boldsymbol{p} \qquad (35) \\
\dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p} + U\right) + \boldsymbol{F} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \qquad (36)
\end{aligned}$$

の関係式を用いればよい[2]。ちなみに F は、前述の抵抗や外力がある場合は、

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \lambda_1\dot{\theta}_1 \\ \sigma_2 - \lambda_2\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

さもなくば $F_d = 0(d = 1, 2)$ である。

具体的に求めると、ハミルトンの正準方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\theta}} &= R^{-1}\boldsymbol{p} \\
&= \frac{1}{m_{1,2}l_1^2 m_2 l_2^2 - m_2^2 l_1^2 l_2^2 C^2}\begin{bmatrix} m_2 l_2^2 p_1 - m_2 l_1 l_2 C p_2 \\ -m_2 l_1 l_2 C p_1 + m_{1,2} l_1^2 p_2 \end{bmatrix} \qquad (38) \\
\dot{\boldsymbol{p}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{\partial R}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \ldots\right)^\top - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 S\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 l_2 S\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{1,2} g l_1 \sin\theta_1 \\ m_2 g l_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{F} \qquad (39)
\end{aligned}$$

□

[2] **この導出には、$R \cdot R^{-1} = I$ の関係から、**

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(R \cdot R^{-1}\right) = \frac{\partial R}{\partial \theta_i}R^{-1} + R\frac{\partial R^{-1}}{\partial \theta_i} = 0$$

であるので、これに $\boldsymbol{p}^\top R^{-1}$ を左から、$\boldsymbol{p}$ を右からかけて、

$$\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\frac{\partial R}{\partial \theta_i}R^{-1}\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{p}^\top R^{-1} R\frac{\partial R^{-1}}{\partial \theta_i}\boldsymbol{p}$$

ゆえに、

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{\partial R}{\partial \theta_i}\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\boldsymbol{p}^\top \frac{\partial R^{-1}}{\partial \theta_i}\boldsymbol{p}$$

が成立することを利用している [14]。

［発展］ 動座標系におけるラグランジュ運動方程式及びハミルトンの正準方程式の導出

O_1 が時変の位置 $\boldsymbol{\Gamma} = (\Gamma_x, \Gamma_y)$ によって動くことにより、振り子が強制振動される場合を考える[3]。i 番目の質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i = (x_{G_i}, y_{G_i})$ として、この動座標系における運動エネルギー T は、

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{r}}_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^\top\dot{\boldsymbol{r}}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 \tag{43}$$

となり、位置エネルギー U は、

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i g y_{G_i} + \sum_{i=1}^{n} m_i g \Gamma_y \tag{44}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^\top\dot{\boldsymbol{r}}_i &= m_1(\dot{\Gamma}_x, \dot{\Gamma}_y)\begin{bmatrix} l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \\ l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 \end{bmatrix} + m_2(\dot{\Gamma}_x, \dot{\Gamma}_y)\begin{bmatrix} l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \\ l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m_{1,2}l_1\left(\dot{\Gamma}_x\cos\theta_1 + \dot{\Gamma}_y\sin\theta_1\right) \\ m_2 l_2\left(\dot{\Gamma}_x\cos\theta_2 + \dot{\Gamma}_y\sin\theta_2\right) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{p}_O^\top\dot{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned} \tag{45}$$

とおくと、ラグランジュ関数 L は $L = T - U$ より、

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{p}_O^\top\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 - U \tag{46}$$

となり、ラグランジュ運動方程式は、

$$R\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{R}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_O}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{F} \tag{47}$$

となる。但しここで、

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}_O}{\partial t} = \begin{bmatrix} m_{1,2}l_1\left(\ddot{\Gamma}_x\cos\theta_1 + \ddot{\Gamma}_y\sin\theta_1\right) \\ m_2 l_2\left(\ddot{\Gamma}_x\cos\theta_2 + \ddot{\Gamma}_y\sin\theta_2\right) \end{bmatrix} \tag{48}$$

である。

[3] 以下は強制振動の一例とその速度、加速度。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma} &= (\Delta_x\sin(\Omega_x t), \Delta_y\cos(\Omega_y t)) && (40)\\
\dot{\boldsymbol{\Gamma}} &= (\Delta_x\Omega_x\cos(\Omega_x t), -\Delta_y\Omega_y\sin(\Omega_y t)) && (41)\\
\ddot{\boldsymbol{\Gamma}} &= \left(-\Delta_x\Omega_x^2\sin(\Omega_x t), -\Delta_y\Omega_y^2\cos(\Omega_y t)\right) && (42)
\end{aligned}$$

この場合の角運動量 p は、$\boldsymbol{p} = R\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{p}_O$ であるので、$\dot{\boldsymbol{\theta}} = R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)$ より、ハミルトニアン H は、

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U \tag{49}$$

であり、ハミルトニアン H からハミルトンの正準方程式を得るには以下

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U\right\} \\
&= R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) \qquad (50) \\
\dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U\right\} + \boldsymbol{F} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left\{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)\right\} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= -\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top \frac{\partial R^{-1}}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{\partial(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top}{\partial \theta_1} R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O), \dots\right)^\top - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= -\left(-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{\partial R}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial \boldsymbol{p}_O^\top}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \dots\right)^\top - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}_O^\top \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \qquad (51)
\end{aligned}$$

の関係式を用いればよい。但しここで、

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}_O^\top \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) = \begin{bmatrix} m_{1,2}l_1\left(-\dot{\Gamma}_x \sin\theta_1 + \dot{\Gamma}_y \cos\theta_1\right)\dot{\theta}_1 \\ m_2 l_2\left(-\dot{\Gamma}_x \sin\theta_2 + \dot{\Gamma}_y \cos\theta_2\right)\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{52}$$

である。

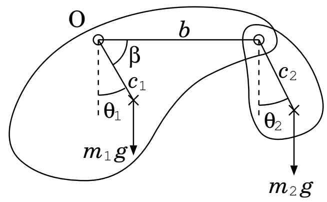
2　2重剛体振り子

(問題) 2 つの剛体によって構成された 2 重剛体振り子 (Double Rigid Pendulum) がある。これらは重力と逆向きの方向を y 軸とする xy 平面上で回転運動するものとする。剛体 1 は質量 m_1 で、原点 O に固定された回転軸 O_1 をもち、O_1 から剛体 1 の重心 G_1 までの距離を c_1 とする。また、剛体 1 の O_1 周りの慣性モーメントを I_{O_1} とする。

もうひとつの剛体 2 は質量 m_2 で、剛体 1 上の O_1 から距離 b、角度 $\angle G_1O_1O_2 = \beta$ の回転軸 O_2 をもち、O_2 から剛体 2 の重心 G_2 までの距離を c_2 とする。また、剛体 2 の G_2 周りの慣性モーメントを I_{G_2} とする。

この 2 重剛体振り子のラグランジュ運動方程式を記述せよ。また、計算機シミュレーションなどをしやすいように、求められた 2 階常微分方程式を連立の 1 階常微分方程式に変換せよ。

また、この振り子が各々の角速度に比例する抵抗や外力を受けている場合においても同様に求めよ。



(解答) 剛体 1,2 の y 軸に対する角度を θ_1, θ_2 とする。剛体 1 の重心 G_1 の座標 (x_{G_1}, y_{G_1}) およびその速度 V_{G_1} の 2 乗は、

$$\begin{aligned} x_{G_1} &= c_1 \sin\theta_1 &(53)\\ y_{G_1} &= -c_1\cos\theta_1 &(54)\\ V_{G_1}^2 &= \dot{x}_{G_1}^2 + \dot{y}_{G_1}^2 \\ &= (c_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2 + (c_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2 \\ &= c_1^2\dot{\theta}_1^2 &(55)\end{aligned}$$

となる。剛体 2 の重心 G_2 の座標 (x_{G_2}, y_{G_2}) およびその速度 V_{G_2} の 2 乗は、

$$\begin{aligned} x_{G_2} &= b\sin(\theta_1+\beta) + c_2\sin\theta_2 &(56)\\ y_{G_2} &= -b\cos(\theta_1+\beta) - c_2\cos\theta_2 &(57)\\ V_{G_2}^2 &= \dot{x}_{G_2}^2 + \dot{y}_{G_2}^2 \\ &= \left\{b\dot{\theta}_1\cos(\theta_1+\beta) + c_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2\right\}^2 + \left\{b\dot{\theta}_1\sin(\theta_1+\beta) + c_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2\right\}^2 \\ &= b^2\dot{\theta}_1^2 + c_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2bc_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1+\beta-\theta_2) &(58)\end{aligned}$$

となる。ここで、剛体 1 の運動エネルギー T_1 および位置エネルギー U_1 は、

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}I_{O_1}\dot{\theta}_1^2 &(59)\\ U_1 &= m_1 g y_{G_1} \\ &= -m_1 g c_1\cos\theta_1 &(60)\end{aligned}$$

また、剛体 2 の運動エネルギー T_2 および位置エネルギー U_2 は、

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}I_{G_2}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_2V_{G_2}^2 \\ &= \frac{1}{2}I_{G_2}\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\left\{b^2\dot{\theta}_1^2 + c_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2bc_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1+\beta-\theta_2)\right\} &(61)\\ U_2 &= m_2 g y_{G_2} \\ &= -m_2 g\left\{b\cos(\theta_1+\beta) + c_2\cos\theta_2\right\} &(62)\end{aligned}$$

となる。この 2 重剛体振り子のラグランジュ関数 L は、

$$\begin{aligned}
L &= T-U \\
&= (T_1+T_2)-(U_1+U_2) \\
&= \frac{1}{2}I_{O_1}\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}I_{G_2}\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}m_2b^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2c_2^2\dot{\theta}_2^2 \\
&\quad +m_2bc_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1+\beta-\theta_2)+m_1gc_1\cos\theta_1+m_2g\left(b\cos(\theta_1+\beta)+c_2\cos\theta_2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(I_{O_1}+m_2b^2\right)\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}\left(I_{G_2}+m_2c_2^2\right)\dot{\theta}_2^2 \\
&\quad +m_2bc_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1+\beta-\theta_2)+m_1gc_1\cos\theta_1+m_2gb\cos(\theta_1+\beta)+m_2gc_2\cos\theta_2 \qquad (63)
\end{aligned}$$

となる。このラグランジュ関数 L から θ_1,θ_2 に関するラグランジュ運動方程式をたてるには、以下の関係式を用いればよい。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}-\frac{\partial L}{\partial\theta_1} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}-\frac{\partial L}{\partial\theta_2} &= 0
\end{aligned}$$

これを具体的に求めると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1} &= \left(I_{O_1}+m_2b^2\right)\dot{\theta}_1+m_2bc_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1+\beta-\theta_2) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1} &= \left(I_{O_1}+m_2b^2\right)\ddot{\theta}_1+m_2bc_2\left\{\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1+\beta-\theta_2)-\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1+\beta-\theta_2)\right\} \qquad (64) \\
-\frac{\partial L}{\partial\theta_1} &= m_2bc_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1+\beta-\theta_2)+m_1gc_1\sin\theta_1+m_2gb\sin(\theta_1+\beta) \qquad (65) \\
\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2} &= \left(I_{G_2}+m_2c_2^2\right)\dot{\theta}_2+m_2bc_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1+\beta-\theta_2) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2} &= \left(I_{G_2}+m_2c_2^2\right)\ddot{\theta}_2+m_2bc_2\left\{\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1+\beta-\theta_2)-\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1+\beta-\theta_2)\right\} \qquad (66) \\
-\frac{\partial L}{\partial\theta_2} &= -m_2bc_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1+\beta-\theta_2)+m_2gc_2\sin\theta_2 \qquad (67)
\end{aligned}$$

ゆえに、θ_1,θ_2 に関するラグランジュ運動方程式は、

$$\begin{aligned}
\left(I_{O_1}+m_2b^2\right)\ddot{\theta}_1+m_1gc_1\sin\theta_1+m_2gb\sin(\theta_1+\beta)+m_2bc_2\left\{\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1+\beta-\theta_2)+\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1+\beta-\theta_2)\right\} &= 0 \qquad (68) \\
\left(I_{G_2}+m_2c_2^2\right)\ddot{\theta}_2+m_2gc_2\sin\theta_2+m_2bc_2\left\{\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1+\beta-\theta_2)-\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1+\beta-\theta_2)\right\} &= 0 \qquad (69)
\end{aligned}$$

となる[4]。 □

ここで、求められた 2 階の微分方程式を連立 1 階微分方程式に直すため、便宜上以下のようにおく。

$$\begin{aligned}
C &= \cos(\theta_1+\beta-\theta_2)=\cos\beta\cos(\theta_1-\theta_2)-\sin\beta\sin(\theta_1-\theta_2) \\
S &= \sin(\theta_1+\beta-\theta_2)=\sin\beta\cos(\theta_1-\theta_2)+\cos\beta\sin(\theta_1-\theta_2) \\
I_{1,2} &= I_{O_1}+m_2b^2 \\
I_2 &= I_{G_2}+m_2c_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{1,2}\ddot{\theta}_1+m_1gc_1\sin\theta_1+m_2gb\sin(\theta_1+\beta)+m_2bc_2\left(C\ddot{\theta}_2+S\dot{\theta}_2^2\right) &= 0 \qquad (70) \\
I_2\ddot{\theta}_2+m_2gc_2\sin\theta_2+m_2bc_2\left(C\ddot{\theta}_1-S\dot{\theta}_1^2\right) &= 0 \qquad (71)
\end{aligned}$$

上式を整理すると,

$$\begin{aligned}
I_{1,2}\ddot{\theta}_1+m_2bc_2C\ddot{\theta}_2 &= -m_2bc_2S\dot{\theta}_2^2-\{m_1gc_1\sin\theta_1+m_2gb\sin(\theta_1+\beta)\} \\
I_2\ddot{\theta}_2+m_2bc_2C\ddot{\theta}_1 &= m_2bc_2S\dot{\theta}_1^2-m_2gc_2\sin\theta_2
\end{aligned}$$

[4] これは $\beta=0$ であるときに、文献 [8] の式 (2.156) の $\tau_1=\tau_2=0$ であるときと等しい。

$$
\begin{aligned}
I_{1,2}I_2\ddot{\theta}_1 + m_2bc_2CI_2\ddot{\theta}_2 &= -m_2bc_2SI_2\dot{\theta}_2^2 - \{m_1gc_1\sin\theta_1 + m_2gb\sin(\theta_1+\beta)\}\, I_2 \\
m_2^2b^2c_2^2C^2\ddot{\theta}_1 + m_2bc_2CI_2\ddot{\theta}_2 &= m_2^2b^2c_2^2CS\dot{\theta}_1^2 - m_2bc_2Cm_2gc_2\sin\theta_2
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$(I_{1,2}I_2 - m_2^2b^2c_2^2C^2)\ddot{\theta}_1 = -m_2bc_2SI_2\dot{\theta}_2^2 - m_2^2b^2c_2^2CS\dot{\theta}_1^2 - \{m_1gc_1\sin\theta_1 + m_2gb\sin(\theta_1+\beta)\}\, I_2 + m_2bc_2Cm_2gc_2\sin\theta_2$$

$$
\begin{aligned}
I_{1,2}m_2bc_2C\ddot{\theta}_1 + m_2^2b^2c_2^2C^2\ddot{\theta}_2 &= -m_2^2b^2c_2^2CS\dot{\theta}_2^2 - \{m_1gc_1\sin\theta_1 + m_2gb\sin(\theta_1+\beta)\}\, m_2bc_2C \\
I_{1,2}m_2bc_2C\ddot{\theta}_1 + I_{1,2}I_2\ddot{\theta}_2 &= I_{1,2}m_2bc_2S\dot{\theta}_1^2 - I_{1,2}m_2gc_2\sin\theta_2
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$(m_2^2b^2c_2^2C^2 - I_{1,2}I_2)\ddot{\theta}_2 = -m_2^2b^2c_2^2CS\dot{\theta}_2^2 - I_{1,2}m_2bc_2S\dot{\theta}_1^2 - \{m_1gc_1\sin\theta_1 + m_2gb\sin(\theta_1+\beta)\}\, m_2bc_2C + I_{1,2}m_2gc_2\sin\theta_2$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-m_2bc_2SI_2\dot{\theta}_2^2 - m_2^2b^2c_2^2CS\dot{\theta}_1^2 - \{m_1gc_1\sin\theta_1 + m_2gb\sin(\theta_1+\beta)\}\, I_2 + m_2^2gbc_2^2C\sin\theta_2}{I_{1,2}I_2 - m_2^2b^2c_2^2C^2} \tag{72}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-m_2^2b^2c_2^2CS\dot{\theta}_2^2 - I_{1,2}m_2bc_2S\dot{\theta}_1^2 - \left\{m_1m_2gbc_1c_2C\sin\theta_1 + m_2^2gb^2c_2C\sin(\theta_1+\beta)\right\} + I_{1,2}m_2gc_2\sin\theta_2}{m_2^2b^2c_2^2C^2 - I_{1,2}I_2} \tag{73}$$

となる。さらに、

$$\vartheta_1 = \dot{\theta}_1, \qquad \vartheta_2 = \dot{\theta}_2$$

とおくことにより以下の連立 1 階微分方程式を得る。

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= \vartheta_1 \qquad (74)\\
\dot{\theta}_2 &= \vartheta_2 \qquad (75)\\
\dot{\vartheta}_1 &= \frac{-m_2bc_2SI_2\vartheta_2^2 - m_2^2b^2c_2^2CS\vartheta_1^2 - \{m_1gc_1\sin\theta_1 + m_2gb\sin(\theta_1+\beta)\}\, I_2 + m_2^2gbc_2^2C\sin\theta_2}{I_{1,2}I_2 - m_2^2b^2c_2^2C^2} \qquad (76)\\
\dot{\vartheta}_2 &= \frac{-m_2^2b^2c_2^2CS\vartheta_2^2 - I_{1,2}m_2bc_2S\vartheta_1^2 - \left\{m_1m_2gbc_1c_2C\sin\theta_1 + m_2^2gb^2c_2C\sin(\theta_1+\beta)\right\} + I_{1,2}m_2gc_2\sin\theta_2}{m_2^2b^2c_2^2C^2 - I_{1,2}I_2} \qquad (77)
\end{aligned}
$$

□

また、各々の角速度に比例する抵抗などの減衰や強制振動のような外力がある場合は、$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ それぞれに対する減衰定数を λ_1, λ_2、外力を σ_1, σ_2 とすると、θ_1, θ_2 に関するラグランジュ運動方程式は式 (68),(69) から、

$$\begin{aligned}
&\left(I_{O_1} + m_2 b^2\right)\ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \sin\theta_1 + m_2 g b \sin(\theta_1 + \beta) \\
&\qquad + m_2 b c_2 \left\{\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 + \beta - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 + \beta - \theta_2)\right\} = \sigma_1 - \lambda_1 \dot{\theta}_1 \qquad (78) \\
&\left(I_{G_2} + m_2 c_2^2\right)\ddot{\theta}_2 + m_2 g c_2 \sin\theta_2 \\
&\qquad + m_2 b c_2 \left\{\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 + \beta - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 + \beta - \theta_2)\right\} = \sigma_2 - \lambda_2 \dot{\theta}_2 \qquad (79)
\end{aligned}$$

となる[5]。 □

よって、式 (74)-(77) に対応する減衰や外力がある場合の連立一階微分方程式は以下のようになる。

$$\dot{\theta}_1 = \vartheta_1 \qquad (80)$$

$$\dot{\theta}_2 = \vartheta_2 \qquad (81)$$

$$\dot{\vartheta}_1 = \frac{\left\{\begin{array}{l} -m_2 b c_2 S I_2 \vartheta_2^2 - m_2^2 b^2 c_2^2 C S \vartheta_1^2 \\ \ -\{m_1 g c_1 \sin\theta_1 + m_2 g b \sin(\theta_1 + \beta)\} I_2 + m_2^2 g b c_2^2 C \sin\theta_2 \\ \ +I_2 \sigma_1 - m_2 b c_2 C \sigma_2 \vartheta_2 \\ \quad -I_2 \lambda_1 \vartheta_1 + m_2 b c_2 C \lambda_2 \vartheta_2 \end{array}\right\}}{I_{1,2} I_2 - m_2^2 b^2 c_2^2 C^2} \qquad (82)$$

$$\dot{\vartheta}_2 = \frac{\left\{\begin{array}{l} -m_2^2 b^2 c_2^2 C S \vartheta_2^2 - I_{1,2} m_2 b c_2 S \vartheta_1^2 \\ \ -\left\{m_1 m_2 g b c_1 c_2 C \sin\theta_1 + m_2^2 g b^2 c_2 C \sin(\theta_1 + \beta)\right\} + I_{1,2} m_2 g c_2 \sin\theta_2 \\ \ +m_2 b c_2 C \sigma_1 - I_{1,2} \sigma_2 \\ \quad -m_2 b c_2 C \lambda_1 \vartheta_1 + I_{1,2} \lambda_2 \vartheta_2 \end{array}\right\}}{m_2^2 b^2 c_2^2 C^2 - I_{1,2} I_2} \qquad (83)$$

□

[5] これは $\beta = 0$ であるときに、文献 [8] の式 (2.156) の $\tau_1 = \sigma_1 + \sigma_2,\ \tau_2 = \sigma_2$ であるときと等しい。

[補足]　ハミルトンの正準方程式の導出

ここで、運動エネルギー T を以下のように表す。

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\top} R \dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{84}$$

但しここで、$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$、

$$R = \begin{pmatrix} I_{1,2} & m_2 b c_2 C \\ m_2 b c_2 C & I_2 \end{pmatrix} \tag{85}$$

である。すると、角運動量 $\boldsymbol{p}$ は、$\boldsymbol{p} = R\dot{\boldsymbol{\theta}}$ と表される。ハミルトニアン H は

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{\top} R^{-1} \boldsymbol{p} + U \tag{86}$$

であり、ハミルトニアン H からハミルトンの正準方程式を得るには以下

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{\top} R^{-1} \boldsymbol{p} + U\right) \\ &= R^{-1}\boldsymbol{p} \end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^{\top} R^{-1} \boldsymbol{p} + U\right) + \boldsymbol{F} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}^{\top} R^{-1} \boldsymbol{p}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\top} R \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \end{aligned} \tag{88}$$

の関係式を用いればよい。ちなみに $\boldsymbol{F}$ は、前述の抵抗や外力がある場合は、

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \lambda_1 \dot{\theta}_1 \\ \sigma_2 - \lambda_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{89}$$

さもなくば $F_d = 0 (d = 1, 2)$ である。

具体的に求めると、ハミルトンの正準方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}} &= R^{-1}\boldsymbol{p} \\ &= \frac{1}{I_{1,2}I_2 - m_2^2 b^2 c_2^2 C^2}\begin{bmatrix} I_2 p_1 - m_2 b c_2 C p_2 \\ -m_2 b c_2 C p_1 + I_{1,2} p_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\top} R \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\top}\frac{\partial R}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \ldots\right)^{\top} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\ &= \begin{bmatrix} -m_2 b c_2 S \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ m_2 b c_2 S \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{m_1 g c_1 \sin\theta_1 + m_2 g b \sin(\theta_1 + \beta)\} \\ m_2 g c_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{F} \end{aligned} \tag{91}$$

□

[発展]　動座標系におけるラグランジュ運動方程式及びハミルトンの正準方程式の導出

O_1 **が時変の位置** $\boldsymbol{\Gamma} = (\Gamma_x, \Gamma_y)$ **によって動くことにより、振り子が強制振動される場合を考える。**i **番目の質点の位置ベクトルを** $\boldsymbol{r}_i = (x_{G_i}, y_{G_i})$ **として、この動座標系における運動エネルギー** T **は、**

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{r}}_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^\top\dot{\boldsymbol{r}}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 \tag{92}$$

となり、位置エネルギー U **は、**

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i g y_{G_i} + \sum_{i=1}^{n} m_i g \Gamma_y \tag{93}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^\top\dot{\boldsymbol{r}}_i &= m_1(\dot{\Gamma}_x, \dot{\Gamma}_y)\begin{bmatrix} c_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \\ c_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 \end{bmatrix} + m_2(\dot{\Gamma}_x, \dot{\Gamma}_y)\begin{bmatrix} b_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1+\beta) + c_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \\ b_2\dot{\theta}_1\sin(\theta_1+\beta) + c_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_1 c_1\left(\dot{\Gamma}_x\cos\theta_1 + \dot{\Gamma}_y\sin\theta_1\right) + m_2 b\left(\dot{\Gamma}_x\cos(\theta_1+\beta) + \dot{\Gamma}_y\sin(\theta_1+\beta)\right) \\ m_2 c_2\left(\dot{\Gamma}_x\cos\theta_2 + \dot{\Gamma}_y\sin\theta_2\right) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{p}_O^\top\dot{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned} \tag{94}$$

とおくと、ラグランジュ関数 L **は** $L = T - U$ **より、**

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{p}_O^\top\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 - U \tag{95}$$

となり、ラグランジュ運動方程式は、

$$R\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{R}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_O}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{F} \tag{96}$$

となる。但しここで、

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}_O}{\partial t} = \begin{bmatrix} m_1 c_1\left(\ddot{\Gamma}_x\cos\theta_1 + \ddot{\Gamma}_y\sin\theta_1\right) + m_2 b\left(\ddot{\Gamma}_x\cos(\theta_1+\beta) + \ddot{\Gamma}_y\sin(\theta_1+\beta)\right) \\ m_2 c_2\left(\ddot{\Gamma}_x\cos\theta_2 + \ddot{\Gamma}_y\sin\theta_2\right) \end{bmatrix} \tag{97}$$

である。

この場合の角運動量 p は、$\boldsymbol{p} = R\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{p}_O$ であるので、$\dot{\boldsymbol{\theta}} = R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)$ より、ハミルトニアン H は、

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U \tag{98}$$

であり、ハミルトニアン H からハミルトンの正準方程式を得るには以下

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U\right\} \\
&= R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) \qquad (99) \\
\dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U\right\} + \boldsymbol{F} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left\{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)\right\} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= -\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top \frac{\partial R^{-1}}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{\partial(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top}{\partial \theta_1} R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O), \ldots\right)^\top - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= -\left(-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{\partial R}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial \boldsymbol{p}_O^\top}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \ldots\right)^\top - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}_O^\top \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \qquad (100)
\end{aligned}$$

の関係式を用いればよい。但しここで、

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}_O^\top \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) = \begin{bmatrix} m_1 c_1\left(-\dot{\Gamma}_x \sin\theta_1 + \dot{\Gamma}_y \cos\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + m_2 b\left(-\dot{\Gamma}_x \sin(\theta_1 + \beta) + \dot{\Gamma}_y \cos(\theta_1 + \beta)\right)\dot{\theta}_1 \\ m_2 c_2\left(-\dot{\Gamma}_x \sin\theta_2 + \dot{\Gamma}_y \cos\theta_2\right)\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{101}$$

である。

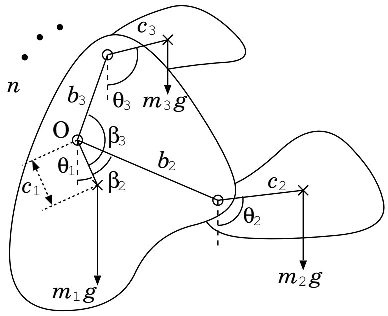
3 並列多重剛体振り子

(問題) n 個の剛体が並列に連結された多重剛体振り子 (Parallel-Multiple Rigid Pendulum) がある。これらは重力と逆向きの方向を y 軸とする xy 平面上で回転運動するものとする。剛体 1 は質量 m_1 で、原点 O に固定された回転軸 O_1 をもち、O_1 から剛体 1 の重心 G_1 までの距離を c_1 とする。また、剛体 1 の O_1 周りの慣性モーメントを I_{O_1} とする。

その他の剛体 $i(i=2,\dots n)$ は質量 m_i で、剛体 1 上の O_1 から距離 b_i、角度 $\angle G_1O_1O_i = \beta_i$ の回転軸 O_i をもち、O_i から剛体 i の重心 G_i までの距離を c_i とする。また、剛体 i の G_i 周りの慣性モーメントを I_{G_i} とする。

この多重剛体振り子のラグランジュ運動方程式を記述せよ。また、計算機シミュレーションなどをしやすいように、求められた 2 階常微分方程式を連立の 1 階常微分方程式に変換せよ。

また、この振り子が各々の角速度に比例する抵抗や外力を受けている場合においても同様に求めよ。



(解答) 剛体 $1,i(i=2,\dots,n)$ の y 軸に対する角度を θ_1,θ_i とする。剛体 1 の重心 G_1 の座標 (x_{G_1},y_{G_1}) およびその速度 V_{G_1} の 2 乗は、

$$
\begin{aligned}
x_{G_1} &= c_1\sin\theta_1 & (102)\\
y_{G_1} &= -c_1\cos\theta_1 & (103)\\
V_{G_1}^2 &= \dot{x}_{G_1}^2+\dot{y}_{G_1}^2 \\
&= (c_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2+(c_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2 \\
&= c_1^2\dot{\theta}_1^2 & (104)
\end{aligned}
$$

となる。剛体 $i(i=2,\dots,n)$ の重心 G_i の座標 (x_{G_i},y_{G_i}) およびその速度 V_{G_i} の 2 乗は、

$$
\begin{aligned}
x_{G_i} &= b_i\sin(\theta_1+\beta_i)+c_i\sin\theta_i & (105)\\
y_{G_i} &= -b_i\cos(\theta_1+\beta_i)-c_i\cos\theta_i & (106)\\
V_{G_i}^2 &= \dot{x}_{G_i}^2+\dot{y}_{G_i}^2 \\
&= (b_i\dot{\theta}_1\cos(\theta_1+\beta_i)+c_i\dot{\theta}_i\cos\theta_i)^2+(b_i\dot{\theta}_1\sin(\theta_1+\beta_i)+c_i\dot{\theta}_i\sin\theta_i)^2 \\
&= b_i^2\dot{\theta}_1^2+c_i^2\dot{\theta}_i^2+2b_ic_i\dot{\theta}_1\dot{\theta}_i\cos(\theta_1+\beta_i-\theta_i) & (107)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、剛体 1 の運動エネルギー T_1 および位置エネルギー U_1 は、

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}I_{O_1}\dot{\theta}_1^2 & (108)\\
U_1 &= m_1gy_{G_1} \\
&= -m_1gc_1\cos\theta_1 & (109)
\end{aligned}
$$

また、剛体 $i(i=2,\dots,n)$ の運動エネルギー T_i および位置エネルギー U_i は、

$$
\begin{aligned}
T_i &= \frac{1}{2}I_{G_i}\dot{\theta}_i^2+\frac{1}{2}m_iV_{G_i}^2 \\
&= \frac{1}{2}I_{G_i}\dot{\theta}_i^2+\frac{1}{2}m_i\left\{b_i^2\dot{\theta}_1^2+c_i^2\dot{\theta}_i^2+2b_ic_i\dot{\theta}_1\dot{\theta}_i\cos(\theta_1+\beta_i-\theta_i)\right\} & (110)\\
U_i &= m_igy_{G_i} \\
&= -m_ig\left\{b_i\cos(\theta_1+\beta_i)+c_i\cos\theta_i\right\} & (111)
\end{aligned}
$$

となる。この多重剛体振り子のラグランジュ関数 L は、

$$
\begin{aligned}
L &= T - U \\
&= \left(T_1 + \sum_{i=2}^{n} T_i\right) - \left(U_1 + \sum_{i=2}^{n} U_i\right) \\
&= \frac{1}{2} I_{O_1} \dot{\theta}_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \left\{ \frac{1}{2} I_{G_i} \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} m_i b_i^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_i c_i^2 \dot{\theta}_i^2 + m_i b_i c_i \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_i \cos(\theta_1 + \beta_i - \theta_i) \right\} \\
&\quad + m_1 g c_1 \cos\theta_1 + \sum_{i=2}^{n} m_i g \left\{ b_i \cos(\theta_1 + \beta_i) + c_i \cos\theta_i \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(I_{O_1} + \sum_{i=2}^{n} m_i b_i^2 \right) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} \left(I_{G_i} + m_i c_i^2 \right) \dot{\theta}_i^2 + \sum_{i=2}^{n} m_i b_i c_i \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_i \cos(\theta_1 + \beta_i - \theta_i) \\
&\quad + m_1 g c_1 \cos\theta_1 + \sum_{i=2}^{n} m_i g b_i \cos(\theta_1 + \beta_i) + \sum_{i=2}^{n} m_i g c_i \cos\theta_i
\end{aligned}
\tag{112}
$$

となる。このラグランジュ関数 L から $\theta_1, \theta_d (d = 2, \ldots, n)$ に関するラグランジュ運動方程式をたてるには、以下の関係式を用いればよい。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} &= 0
\end{aligned}
$$

これを具体的に求めると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \left(I_{O_1} + \sum_{i=2}^{n} m_i b_i^2 \right) \dot{\theta}_1 + \sum_{i=2}^{n} m_i b_i c_i \dot{\theta}_i \cos(\theta_1 + \beta_i - \theta_i) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \left(I_{O_1} + \sum_{i=2}^{n} m_i b_i^2 \right) \ddot{\theta}_1 + \sum_{i=2}^{n} m_i b_i c_i \left\{ \ddot{\theta}_i \cos(\theta_1 + \beta_i - \theta_i) - \dot{\theta}_i (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_i) \sin(\theta_1 + \beta_i - \theta_i) \right\} && (113) \\
-\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= \sum_{i=2}^{n} m_i b_i c_i \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_i \sin(\theta_1 + \beta_i - \theta_i) + m_1 g c_1 \sin\theta_1 + \sum_{i=2}^{n} m_i g b_i \sin(\theta_1 + \beta_i) && (114) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_d} &= \left(I_{G_d} + m_d c_d^2 \right) \dot{\theta}_d + m_d b_d c_d \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 + \beta_d - \theta_d) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_d} &= \left(I_{G_d} + m_d c_d^2 \right) \ddot{\theta}_d + m_d b_d c_d \left\{ \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 + \beta_d - \theta_d) - \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_d) \sin(\theta_1 + \beta_d - \theta_d) \right\} && (115) \\
-\frac{\partial L}{\partial \theta_d} &= -m_d b_d c_d \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_d \sin(\theta_1 + \beta_d - \theta_d) + m_d g c_d \sin\theta_d && (116)
\end{aligned}
$$

ゆえに、$\theta_1, \theta_d (d = 2, \ldots, n)$ に関するラグランジュ運動方程式は、

$$
\begin{aligned}
&\left(I_{O_1} + \sum_{i=2}^{n} m_i b_i^2 \right) \ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \sin\theta_1 + \sum_{i=2}^{n} m_i g b_i \sin(\theta_1 + \beta_i) \\
&\qquad + \sum_{i=2}^{n} m_i b_i c_i \left\{ \ddot{\theta}_i \cos(\theta_1 + \beta_i - \theta_i) + \dot{\theta}_i^2 \sin(\theta_1 + \beta_i - \theta_i) \right\} = 0 && (117) \\
&\left(I_{G_d} + m_d c_d^2 \right) \ddot{\theta}_d + m_d g c_d \sin\theta_d \\
&\qquad + m_d b_d c_d \left\{ \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 + \beta_d - \theta_d) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 + \beta_d - \theta_d) \right\} = 0 && (118)
\end{aligned}
$$

となる。 □

ここで、求められた 2 階の微分方程式を連立 1 階微分方程式に直すため、便宜上以下のようにおく。

$$
\begin{aligned}
C_i &= \cos(\theta_1 + \beta_i - \theta_i) = \cos\beta_i \cos(\theta_1 - \theta_i) - \sin\beta_i \sin(\theta_1 - \theta_i) \\
S_i &= \sin(\theta_1 + \beta_i - \theta_i) = \sin\beta_i \cos(\theta_1 - \theta_i) + \cos\beta_i \sin(\theta_1 - \theta_i)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} I_{1,\ldots,n} &= I_{O_1} + \sum_{i=2}^{n} m_i b_i^2 \\ I_i &= I_{G_i} + m_i c_i^2 \end{aligned}$$

$$I_{1,\ldots,n}\ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \sin\theta_1 + \sum_{i=2}^{n} m_i g b_i \sin(\theta_1 + \beta_i) + \sum_{i=2}^{n} m_i b_i c_i \left(C_i \ddot{\theta}_i + S_i \dot{\theta}_i^2\right) = 0 \tag{119}$$

$$I_d \ddot{\theta}_d + m_d g c_d \sin\theta_d + m_d b_d c_d \left(C_d \ddot{\theta}_1 - S_d \dot{\theta}_1^2\right) = 0 \tag{120}$$

上式を整理すると,

$$
\begin{aligned}
I_{1,\dots,n}\ddot{\theta}_1+\sum_{i=2}^{n}m_ib_ic_iC_i\ddot{\theta}_i &= -\sum_{i=2}^{n}m_ib_ic_iS_i\dot{\theta}_i^2-\left\{m_1gc_1\sin\theta_1+\sum_{i=2}^{n}m_igb_i\sin(\theta_1+\beta_i)\right\}\\
I_d\ddot{\theta}_d+m_db_dc_dC_d\ddot{\theta}_1 &= m_db_dc_dS_d\dot{\theta}_1^2-m_dgc_d\sin\theta_d
\end{aligned}
$$

$$
m_db_dc_dC_d\ddot{\theta}_d+\frac{m_db_dc_dC_d}{I_d}m_db_dc_dC_d\ddot{\theta}_1 = \frac{m_db_dc_dC_d}{I_d}m_db_dc_dS_d\dot{\theta}_1^2-\frac{m_db_dc_dC_d}{I_d}m_dgc_d\sin\theta_d
$$

$$\Downarrow$$

$$
\ddot{\theta}_1 = \frac{\left\{\begin{array}{l}-\displaystyle\sum_{i=2}^{n}m_ib_ic_iS_i\dot{\theta}_i^2-\sum_{i=2}^{n}\frac{m_i^2b_i^2c_i^2C_iS_i}{I_i}\dot{\theta}_1^2\\ -\left\{m_1gc_1\sin\theta_1+\displaystyle\sum_{i=2}^{n}m_igb_i\sin(\theta_1+\beta_i)\right\}+\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{m_i^2gb_ic_i^2C_i\sin\theta_i}{I_i}\end{array}\right\}}{I_{1,\dots,n}-\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{m_i^2b_i^2c_i^2C_i^2}{I_i}} \tag{121}
$$

$$
\begin{aligned}
I_d\ddot{\theta}_d &= m_db_dc_dS_d\dot{\theta}_1^2-m_dgc_d\sin\theta_d-m_db_dc_dC_d\ddot{\theta}_1\\
&= m_db_dc_dS_d\dot{\theta}_1^2-m_dgc_d\sin\theta_d\\
&\quad -m_db_dc_dC_d\frac{\left\{\begin{array}{l}-\displaystyle\sum_{i=2}^{n}m_ib_ic_iS_i\dot{\theta}_i^2-\sum_{i=2}^{n}\frac{m_ib_ic_iC_i}{I_i}m_ib_ic_iS_i\dot{\theta}_1^2\\ -\left\{m_1gc_1\sin\theta_1+\displaystyle\sum_{i=2}^{n}m_igb_i\sin(\theta_1+\beta_i)\right\}+\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{m_ib_ic_iC_i}{I_i}m_igc_i\sin\theta_i\end{array}\right\}}{I_{1,\dots,n}-\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{m_ib_ic_iC_i}{I_i}m_ib_ic_iC_i}
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\ddot{\theta}_d = \frac{\left\{\begin{array}{l}-m_db_dc_dC_d\displaystyle\sum_{i=2}^{n}m_ib_ic_iS_i\dot{\theta}_i^2\\ +\left\{\left(\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{m_i^2b_i^2c_i^2C_i^2}{I_i}-I_{1,\dots,n}\right)m_db_dc_dS_d-m_db_dc_dC_d\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{m_i^2b_i^2c_i^2C_iS_i}{I_i}\right\}\dot{\theta}_1^2\\ -m_db_dc_dC_d\left\{m_1gc_1\sin\theta_1+\displaystyle\sum_{i=2}^{n}m_igb_i\sin(\theta_1+\beta_i)\right\}+m_db_dc_dC_d\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{m_i^2gb_ic_i^2C_i\sin\theta_i}{I_i}\\ -\left(\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{m_i^2b_i^2c_i^2C_i^2}{I_i}-I_{1,\dots,n}\right)m_dgc_d\sin\theta_d\end{array}\right\}}{\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{m_i^2b_i^2c_i^2C_i^2}{I_i}I_d-I_{1,\dots,n}I_d} \tag{122}
$$

となる。さらに、

$$\vartheta_1=\dot{\theta}_1,\qquad \vartheta_d=\dot{\theta}_d$$

とおくことにより以下の連立 1 階微分方程式を得る[6]。

[6]確認のために $n=2$ として書き下すと、これは確かに式 (74)–(77) に対応する。

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= \vartheta_1 && (123)\\
\dot{\theta}_d &= \vartheta_d && (124)\\
\dot{\vartheta}_1 &= \frac{\left\{\begin{array}{l} -\sum_{i=2}^{n} m_i b_i c_i S_i \vartheta_i^2 - \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 b_i^2 c_i^2 C_i S_i}{I_i} \vartheta_1^2 \\ -\left\{ m_1 g c_1 \sin\theta_1 + \sum_{i=2}^{n} m_i g b_i \sin(\theta_1 + \beta_i) \right\} + \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 g b_i c_i^2 C_i \sin\theta_i}{I_i} \end{array}\right\}}{I_{1,\ldots,n} - \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 b_i^2 c_i^2 C_i^2}{I_i}} && (125)\\
\dot{\vartheta}_d &= \frac{\left\{\begin{array}{l} -m_d b_d c_d C_d \sum_{i=2}^{n} m_i b_i c_i S_i \vartheta_i^2 \\ + \left\{ \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 b_i^2 c_i^2 C_i^2}{I_i} - I_{1,\ldots,n} \right) m_d b_d c_d S_d - m_d b_d c_d C_d \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 b_i^2 c_i^2 C_i S_i}{I_i} \right\} \vartheta_1^2 \\ -m_d b_d c_d C_d \left\{ m_1 g c_1 \sin\theta_1 + \sum_{i=2}^{n} m_i g b_i \sin(\theta_1 + \beta_i) \right\} + m_d b_d c_d C_d \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 g b_i c_i^2 C_i \sin\theta_i}{I_i} \\ - \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 b_i^2 c_i^2 C_i^2}{I_i} - I_{1,\ldots,n} \right) m_d g c_d \sin\theta_d \end{array}\right\}}{\sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 b_i^2 c_i^2 C_i^2}{I_i} I_d - I_{1,\ldots,n} I_d} && (126)
\end{aligned}
$$

$\square$

また、各々の角速度に比例する抵抗などの減衰や強制振動のような外力がある場合は、$\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_d (d = 2, \ldots, n)$ それぞれに対する減衰定数を λ_1, λ_d、外力を σ_1, σ_d とすると、$\theta_1, \theta_d (d = 2, \ldots, n)$ に関するラグランジュ運動方程式は式 (117),(118) から、

$$\begin{aligned} &\left(I_{O_1} + \sum_{i=2}^{n} m_i b_i^2\right) \ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \sin\theta_1 + \sum_{i=2}^{n} m_i g b_i \sin(\theta_1 + \beta_i) \\ &\qquad + \sum_{i=2}^{n} m_i b_i c_i \left\{\ddot{\theta}_i \cos(\theta_1 + \beta_i - \theta_i) + \dot{\theta}_i^2 \sin(\theta_1 + \beta_i - \theta_i)\right\} = \sigma_1 - \lambda_1 \dot{\theta}_1 \end{aligned} \tag{127}$$

$$\begin{aligned} &\left(I_{G_d} + m_d c_d^2\right) \ddot{\theta}_d + m_d g c_d \sin\theta_d \\ &\qquad + m_d b_d c_d \left\{\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 + \beta_d - \theta_d) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 + \beta_d - \theta_d)\right\} = \sigma_d - \lambda_d \dot{\theta}_d \end{aligned} \tag{128}$$

となる。 □

よって、式 (123)-(126) に対応する減衰や外力がある場合の連立一階微分方程式は以下のようになる[7]。

$$\dot{\theta}_1 = \vartheta_1 \tag{129}$$

$$\dot{\theta}_d = \vartheta_d \tag{130}$$

$$\dot{\vartheta}_1 = \frac{\left\{\begin{aligned} &-\sum_{i=2}^{n} m_i b_i c_i S_i \vartheta_i^2 - \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 b_i^2 c_i^2 C_i S_i}{I_i} \vartheta_1^2 \\ &-\left\{m_1 g c_1 \sin\theta_1 + \sum_{i=2}^{n} m_i g b_i \sin(\theta_1 + \beta_i)\right\} + \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 g b_i c_i^2 C_i \sin\theta_i}{I_i} \\ &+\sigma_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i b_i c_i C_i}{I_i} \sigma_i - \lambda_1 \vartheta_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i b_i c_i C_i}{I_i} \lambda_i \vartheta_i \end{aligned}\right\}}{I_{1,\ldots,n} - \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 b_i^2 c_i^2 C_i^2}{I_i}} \tag{131}$$

$$\dot{\vartheta}_d = \frac{\left\{\begin{aligned} &-m_d b_d c_d C_d \sum_{i=2}^{n} m_i b_i c_i S_i \vartheta_i^2 \\ &+\left\{\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 b_i^2 c_i^2 C_i^2}{I_i} - I_{1,\ldots,n}\right) m_d b_d c_d S_d - m_d b_d c_d C_d \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 b_i^2 c_i^2 C_i S_i}{I_i}\right\} \vartheta_1^2 \\ &-m_d b_d c_d C_d \left\{m_1 g c_1 \sin\theta_1 + \sum_{i=2}^{n} m_i g b_i \sin(\theta_1 + \beta_i)\right\} + m_d b_d c_d C_d \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 g b_i c_i^2 C_i \sin\theta_i}{I_i} \\ &-\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 b_i^2 c_i^2 C_i^2}{I_i} - I_{1,\ldots,n}\right) m_d g c_d \sin\theta_d \\ &+\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 b_i^2 c_i^2 C_i^2}{I_i} - I_{1,\ldots,n}\right) \sigma_d + m_d b_d c_d C_d \sigma_1 - m_d b_d c_d C_d \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i b_i c_i C_i}{I_i} \sigma_i \\ &-\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 b_i^2 c_i^2 C_i^2}{I_i} - I_{1,\ldots,n}\right) \lambda_d \vartheta_d - m_d b_d c_d C_d \lambda_1 \vartheta_1 + m_d b_d c_d C_d \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i b_i c_i C_i}{I_i} \lambda_i \vartheta_i \end{aligned}\right\}}{\sum_{i=2}^{n} \frac{m_i^2 b_i^2 c_i^2 C_i^2}{I_i} I_d - I_{1,\ldots,n} I_d} \tag{132}$$

□

[7] 確認のために $n = 2$ として書き下すと、これは確かに式 (80)–(83) に対応する。

[補足]　ハミルトンの正準方程式の導出

ここで、運動エネルギー T **を以下のように表す。**

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{133}$$

但しここで、$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$**、**

$$R = \left(\begin{array}{c|ccc} I_{1,\ldots,n} & \ldots & m_ib_ic_iC_i & \ldots \\ \hline \vdots & \ddots & & 0 \\ m_db_dc_dC_d & & I_d & \\ \vdots & 0 & & \ddots \end{array}\right) \tag{134}$$

である。すると、角運動量 $\boldsymbol{p}$ **は、**$\boldsymbol{p} = R\dot{\boldsymbol{\theta}}$ **と表される。ハミルトニアン** H **は**

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p} + U \tag{135}$$

であり、ハミルトニアン H **からハミルトンの正準方程式を得るには以下**

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p} + U\right) \\ &= R^{-1}\boldsymbol{p} \end{aligned} \tag{136}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p} + U\right) + \boldsymbol{F} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \end{aligned} \tag{137}$$

の関係式を用いればよい。ちなみに $\boldsymbol{F}$ **は、前述の抵抗や外力がある場合は、**

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sigma_d - \lambda_d\dot{\theta}_d \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{138}$$

さもなくば $F_d = 0 (d = 1, \ldots, n)$ **である。**

具体的に求めると、ハミルトンの正準方程式は以下のようになる。

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = R^{-1}\boldsymbol{p}$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{p_1 - \displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{m_ib_ic_iC_i}{I_i}p_i}{I_{1,\ldots,n} - \displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{m_i^2b_i^2c_i^2C_i^2}{I_i}} \tag{139}$$

$$\dot{\theta}_d = \frac{\left(\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{m_i^2b_i^2c_i^2C_i^2}{I_i} - I_{1,\ldots,n}\right)p_d + m_db_dc_dC_dp_1 - m_db_dc_dC_d\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{m_ib_ic_iC_i}{I_i}p_i}{\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{m_i^2b_i^2c_i^2C_i^2}{I_i}I_d - I_{1,\ldots,n}I_d} \tag{140}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top\frac{\partial R}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \ldots\right)^\top - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F}$$

$$\dot{p}_1 = -\sum_{i=2}^{n}m_ib_ic_iS_i\dot{\theta}_1\dot{\theta}_i - \left\{m_1gc_1\sin\theta_1 + \sum_{i=2}^{n}m_igb_i\sin(\theta_1 + \beta_i)\right\} + F_1 \tag{141}$$

$$\dot{p}_d = m_db_dc_dS_d\dot{\theta}_1\dot{\theta}_d - m_dgc_d\sin\theta_d + F_d \tag{142}$$

□

[発展]　動座標系におけるラグランジュ運動方程式及びハミルトンの正準方程式の導出

O_1 **が時変の位置** $\boldsymbol{\Gamma} = (\Gamma_x, \Gamma_y)$ **によって動くことにより、振り子が強制振動される場合を考える。** i **番目の質点の位置ベクトルを** $\boldsymbol{r}_i = (x_{G_i}, y_{G_i})$ **として、この動座標系における運動エネルギー** T **は、**

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{r}}_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^\top\dot{\boldsymbol{r}}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 \tag{143}$$

となり、位置エネルギー U **は、**

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i g y_{G_i} + \sum_{i=1}^{n} m_i g \Gamma_y \tag{144}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^\top\dot{\boldsymbol{r}}_i &= m_1(\dot{\Gamma}_x, \dot{\Gamma}_y)\begin{bmatrix} c_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \\ c_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 \end{bmatrix} + \sum_{i=2}^{n} m_i(\dot{\Gamma}_x, \dot{\Gamma}_y)\begin{bmatrix} b_i\dot{\theta}_1\cos(\theta_1+\beta_i) + c_i\dot{\theta}_i\cos\theta_i \\ b_i\dot{\theta}_1\sin(\theta_1+\beta_i) + c_i\dot{\theta}_i\sin\theta_i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m_1c_1\left(\dot{\Gamma}_x\cos\theta_1 + \dot{\Gamma}_y\sin\theta_1\right) + \sum_{j=2}^{n} m_j b_j\left(\dot{\Gamma}_x\cos(\theta_1+\beta_j) + \dot{\Gamma}_y\sin(\theta_1+\beta_j)\right) \\ \vdots \\ m_ic_i\left(\dot{\Gamma}_x\cos\theta_i + \dot{\Gamma}_y\sin\theta_i\right) \\ \vdots \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \vdots \\ \dot{\theta}_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \boldsymbol{p}_O^\top\dot{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned} \tag{145}$$

とおくと、ラグランジュ関数 L **は** $L = T - U$ **より、**

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{p}_O^\top\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 - U \tag{146}$$

となり、ラグランジュ運動方程式は、

$$R\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{R}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_O}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{F} \tag{147}$$

となる。但しここで、

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}_O}{\partial t} = \begin{bmatrix} m_1c_1\left(\ddot{\Gamma}_x\cos\theta_1 + \ddot{\Gamma}_y\sin\theta_1\right) + \sum_{j=2}^{n} m_j b_j\left(\ddot{\Gamma}_x\cos(\theta_1+\beta_j) + \ddot{\Gamma}_y\sin(\theta_1+\beta_j)\right) \\ \vdots \\ m_ic_i\left(\ddot{\Gamma}_x\cos\theta_i + \ddot{\Gamma}_y\sin\theta_i\right) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{148}$$

である。

この場合の角運動量 p は、$\boldsymbol{p} = R\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{p}_O$ であるので、$\dot{\boldsymbol{\theta}} = R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)$ より、ハミルトニアン H は、

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U \tag{149}$$

であり、ハミルトニアン H からハミルトンの正準方程式を得るには以下

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U\right\} \\
&= R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) \qquad (150) \\
\dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U\right\} + \boldsymbol{F} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left\{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)\right\} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= -\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top \frac{\partial R^{-1}}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{\partial (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top}{\partial \theta_1} R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O), \ldots\right)^\top - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= -\left(-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{\partial R}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial \boldsymbol{p}_O^\top}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \ldots\right)^\top - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}_O^\top \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \qquad (151)
\end{aligned}$$

の関係式を用いればよい。但しここで、

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}_O^\top \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) = \begin{bmatrix} m_1 c_1 \left(-\dot{\Gamma}_x \sin\theta_1 + \dot{\Gamma}_y \cos\theta_1\right)\dot{\theta}_1 + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} m_j b_j \left(-\dot{\Gamma}_x \sin(\theta_1 + \beta_j) + \dot{\Gamma}_y \cos(\theta_1 + \beta_j)\right)\dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ m_i c_i \left(-\dot{\Gamma}_x \sin\theta_i + \dot{\Gamma}_y \cos\theta_i\right)\dot{\theta}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{152}$$

である。

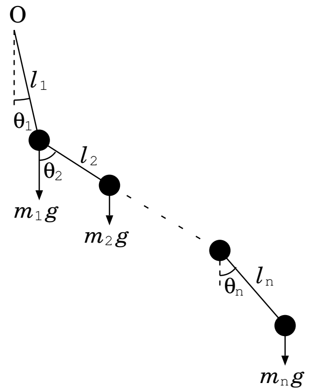
4 直列多重振り子

(**問題**) n **個のおもりが直列に連結された多重振り子** (Series-Multiple Pendulum) **がある。これらは重力と逆向きの方向を** y **軸とする** xy **平面上で回転運動するものとする。おもり** 1 **は質量** m_1 **で、原点** O **に固定された回転軸** O_1 **から長さ** l_1 **の糸でつるされている。**

その他のおもり $i(i = 2, \dots n)$ **は質量** m_i **で、おもり** $i-1$ **に固定された回転軸** O_i **から長さ** l_i **の糸でつるされている。**

この多重振り子のラグランジュ運動方程式を記述せよ。また、計算機シミュレーションなどをしやすいように、求められた 2 **階常微分方程式を連立の** 1 **階常微分方程式に変換せよ。**

また、この振り子が各々の角速度に比例する抵抗や外力を受けている場合においても同様に求めよ。



(**解答**) **おもり** $i(i = 1, \dots, n)$ **の** y **軸に対する角度を** θ_i **とする。おもり** $i(i = 1, \dots, n)$ **の位置** G_i **の座標** (x_{G_i}, y_{G_i}) **およびその速度** V_{G_i} **の** 2 **乗は、**

$$x_{G_i} = \sum_{j=1}^{i} l_j \sin\theta_j \tag{153}$$

$$y_{G_i} = -\sum_{j=1}^{i} l_j \cos\theta_j \tag{154}$$

$$\begin{aligned} V_{G_i}^2 &= \dot{x}_{G_i}^2 + \dot{y}_{G_i}^2 \\ &= \left(\sum_{j=1}^{i} l_j\dot{\theta}_j\cos\theta_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{i} l_j\dot{\theta}_j\sin\theta_j\right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{i} l_j^2\dot{\theta}_j^2 + 2\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=j+1}^{i} l_j l_k \dot{\theta}_j\dot{\theta}_k\cos(\theta_j - \theta_k) \end{aligned} \tag{155}$$

となる。ここで、おもり $i(i = 1, \dots, n)$ **の運動エネルギー** T_i **および位置エネルギー** U_i **は、**

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2}m_i V_{G_i}^2 \\ &= \frac{1}{2}m_i\left\{\sum_{j=1}^{i} l_j^2\dot{\theta}_j^2 + 2\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=j+1}^{i} l_j l_k\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k\cos(\theta_j-\theta_k)\right\} \\ &= \frac{1}{2}m_i\sum_{j=1}^{i} l_j^2\dot{\theta}_j^2 + m_i\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=j+1}^{i} l_j l_k\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k\cos(\theta_j-\theta_k) \end{aligned} \tag{156}$$

$$\begin{aligned} U_i &= m_i g y_{G_i} \\ &= -m_i g\sum_{j=1}^{i} l_j\cos\theta_j \end{aligned} \tag{157}$$

となる。この多重振り子のラグランジュ関数 L **は、**

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \sum_{i=1}^{n} T_i - \sum_{i=1}^{n} U_i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}m_i\sum_{j=1}^{i}l_j^2\dot{\theta}_j^2 + m_i\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=j+1}^{i}l_jl_k\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k\cos(\theta_j-\theta_k)\right\} + \sum_{i=1}^{n}\left(m_ig\sum_{j=1}^{i}l_j\cos\theta_j\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\sum_{j=1}^{i}l_j^2\dot{\theta}_j^2 + \sum_{i=1}^{n}m_i\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=j+1}^{i}l_jl_k\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k\cos(\theta_j-\theta_k) + \sum_{i=1}^{n}m_ig\sum_{j=1}^{i}l_j\cos\theta_j \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{k=i}^{n}m_kl_i^2\dot{\theta}_i^2 + \sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=i}^{n}m_kl_il_j\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j\cos(\theta_i-\theta_j) + \sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=j}^{n}m_kl_il_j\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j\cos(\theta_i-\theta_j)\right\} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}m_kgl_i\cos\theta_i
\end{aligned}
\tag{158}
$$

となる。このラグランジュ関数 L から $\theta_d(d=1,\ldots,n)$ に関するラグランジュ運動方程式をたてるには、以下の関係式を用いればよい。

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_d} - \frac{\partial L}{\partial\theta_d} = 0
$$

これを具体的に求めると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_d} &= m_{d..n}l_d^2\dot{\theta}_d + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\i=d}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j=d}}^{i-1}m_{i..n}l_il_j\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}_d}\dot{\theta}_i\dot{\theta}_jC_{i,j} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\i=d}}^{n}\sum_{\substack{j=i+1\\j=d}}^{n}m_{j..n}l_il_j\frac{\partial}{\partial\dot{\theta}_d}\dot{\theta}_i\dot{\theta}_jC_{i,j} \\
&= m_{d..n}l_d^2\dot{\theta}_d + \sum_{i=1}^{d-1}m_{d..n}l_dl_i\dot{\theta}_iC_{d,i} + \sum_{i=d+1}^{n}m_{i..n}l_dl_i\dot{\theta}_iC_{d,i}
\end{aligned}
\tag{159}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_d} &= m_{d..n}l_d^2\ddot{\theta}_d + \sum_{i=1}^{d-1}m_{d..n}l_dl_i\left\{\ddot{\theta}_iC_{d,i} - \dot{\theta}_i(\dot{\theta}_d-\dot{\theta}_i)S_{d,i}\right\} \\
&\quad + \sum_{i=d+1}^{n}m_{i..n}l_dl_i\left\{\ddot{\theta}_iC_{d,i} - \dot{\theta}_i(\dot{\theta}_d-\dot{\theta}_i)S_{d,i}\right\} \\
&= m_{d..n}l_d^2\ddot{\theta}_d + \sum_{i=1}^{d-1}m_{d..n}l_dl_i\ddot{\theta}_iC_{d,i} - \sum_{i=1}^{d-1}m_{d..n}l_dl_i\dot{\theta}_i(\dot{\theta}_d-\dot{\theta}_i)S_{d,i} \\
&\quad + \sum_{i=d+1}^{n}m_{i..n}l_dl_i\ddot{\theta}_iC_{d,i} - \sum_{i=d+1}^{n}m_{i..n}l_dl_i\dot{\theta}_i(\dot{\theta}_d-\dot{\theta}_i)S_{d,i} \\
&= m_{d..n}l_d^2\ddot{\theta}_d \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d-1}m_{d..n}l_dl_i\ddot{\theta}_iC_{d,i} - \sum_{i=1}^{d-1}m_{d..n}l_dl_i\dot{\theta}_d\dot{\theta}_iS_{d,i} + \sum_{i=1}^{d-1}m_{d..n}l_dl_i\dot{\theta}_i^2S_{d,i} \\
&\quad + \sum_{i=d+1}^{n}m_{i..n}l_dl_i\ddot{\theta}_iC_{d,i} - \sum_{i=d+1}^{n}m_{i..n}l_dl_i\dot{\theta}_d\dot{\theta}_iS_{d,i} + \sum_{i=d+1}^{n}m_{i..n}l_dl_i\dot{\theta}_i^2S_{d,i}
\end{aligned}
\tag{160}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial L}{\partial\theta_d} &= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\i=d}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j=d}}^{i-1}m_{i..n}l_il_j\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j\frac{\partial}{\partial\theta_d}C_{i,j} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\i=d}}^{n}\sum_{\substack{j=i+1\\j=d}}^{n}m_{j..n}l_il_j\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j\frac{\partial}{\partial\theta_d}C_{i,j} + m_{d..n}gl_d\sin\theta_d \\
&= \sum_{i=1}^{d-1}m_{d..n}l_dl_i\dot{\theta}_d\dot{\theta}_iS_{d,i} + \sum_{i=d+1}^{n}m_{i..n}l_dl_i\dot{\theta}_d\dot{\theta}_iS_{d,i} + m_{d..n}gl_d\sin\theta_d
\end{aligned}
\tag{161}
$$

但しここで、

$$
\begin{aligned}
m_{k..l} &= \sum_{j=k}^{l}m_j \\
C_{i,j} &= \cos(\theta_i-\theta_j) \\
S_{i,j} &= \sin(\theta_i-\theta_j)
\end{aligned}
$$

ゆえに、$\theta_d (d = 1, \ldots, n)$ に関するラグランジュ運動方程式は、

$$\begin{aligned} & m_{d..n} l_d^2 \ddot{\theta}_d + \sum_{i=1}^{d-1} m_{d..n} l_d l_i \ddot{\theta}_i C_{d,i} + \sum_{i=d+1}^{n} m_{i..n} l_d l_i \ddot{\theta}_i C_{d,i} \\ & + \sum_{i=1}^{d-1} m_{d..n} l_d l_i \dot{\theta}_i^2 S_{d,i} + \sum_{i=d+1}^{n} m_{i..n} l_d l_i \dot{\theta}_i^2 S_{d,i} + m_{d..n} g l_d \sin\theta_d = 0 \end{aligned} \tag{162}$$

となる[8]。 □

これを連立 1 階微分方程式にするために、この 2 階微分方程式を以下のように表す。

$$R\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{v} \qquad (R \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \ddot{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n) \tag{163}$$

さらに、

$$\vartheta_d = \dot{\theta}_d$$

とおくことにより以下の連立 1 階微分方程式を得る。

$$\dot{\theta}_d = \vartheta_d \tag{164}$$

$$\dot{\vartheta}_d = [R^{-1}\boldsymbol{v}]_d \tag{165}$$

但しここで、

$$R = \begin{pmatrix} m_{1..n} l_1^2 & m_{2..n} l_1 l_2 C_{1,2} & & & m_{n..n} l_1 l_n C_{1,n} \\ & \ddots & & m_{i..n} l_d l_i C_{d,i} & \\ & & m_{d..n} l_d^2 & & \\ & m_{d..n} l_d l_i C_{d,i} & & \ddots & \\ & & & m_{n..n} l_n l_{n-1} C_{n-1,i} & m_{n..n} l_n^2 \end{pmatrix} \tag{166}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=2}^{n} m_{i..n} l_1 l_i \vartheta_i^2 S_{1,i} - m_{1..n} g l_1 \sin\theta_1 \\ \vdots \\ -\sum_{i=1}^{d-1} m_{d..n} l_d l_i \vartheta_i^2 S_{d,i} - \sum_{i=d+1}^{n} m_{i..n} l_d l_i \vartheta_i^2 S_{d,i} - m_{d..n} g l_d \sin\theta_d \\ \vdots \\ -\sum_{i=1}^{n-1} m_{n..n} l_n l_i \vartheta_i^2 S_{n,i} - m_{n..n} g l_n \sin\theta_n \end{bmatrix} \tag{167}$$

である。 □

[8] 確認のために $n = 2$ として書き下すと、確かに式 (16),(17) に対応する。

また、各々の角速度に比例する抵抗などの減衰や強制振動のような外力がある場合は、$\dot{\theta}_d(d=1,\ldots,n)$ それぞれに対する減衰定数を λ_d、外力を σ_d とすると、$\theta_d(d=1,\ldots,n)$ に関するラグランジュ運動方程式は式 (162) から、

$$
\begin{aligned}
&m_{d..n}l_d^2\ddot{\theta}_d + \sum_{i=1}^{d-1} m_{d..n}l_dl_i\ddot{\theta}_iC_{d,i} + \sum_{i=d+1}^{n} m_{i..n}l_dl_i\ddot{\theta}_iC_{d,i} \\
&+\sum_{i=1}^{d-1} m_{d..n}l_dl_i\dot{\theta}_i^2S_{d,i} + \sum_{i=d+1}^{n} m_{i..n}l_dl_i\dot{\theta}_i^2S_{d,i} + m_{d..n}gl_d\sin\theta_d = \sigma_d - \lambda_d\dot{\theta}_d
\end{aligned}
\tag{168}
$$

となる[9]。 □

よって、式 (164),(165) に対応する減衰や外力がある場合の連立一階微分方程式は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}_d &= \vartheta_d &(169)\\
\dot{\vartheta}_d &= [R^{-1}\boldsymbol{w}]_d &(170)
\end{aligned}
$$

但しここで、

$$
R = \begin{pmatrix}
m_{1..n}l_1^2 & m_{2..n}l_1l_2C_{1,2} & & & m_{n..n}l_1l_nC_{1,n} \\
 & \ddots & & m_{i..n}l_dl_iC_{d,i} & \\
 & & m_{d..n}l_d^2 & & \\
 & m_{d..n}l_dl_iC_{d,i} & & \ddots & \\
 & & & m_{n..n}l_nl_{n-1}C_{n-1,i} & m_{n..n}l_n^2
\end{pmatrix}
\tag{171}
$$

$$
\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix}
-\sum_{i=2}^{n} m_{i..n}l_1l_i\vartheta_i^2S_{1,i} - m_{1..n}gl_1\sin\theta_1 + \sigma_1 - \lambda_1\vartheta_1 \\
\vdots \\
-\sum_{i=1}^{d-1} m_{d..n}l_dl_i\vartheta_i^2S_{d,i} - \sum_{i=d+1}^{n} m_{i..n}l_dl_i\vartheta_i^2S_{d,i} - m_{d..n}gl_d\sin\theta_d + \sigma_d - \lambda_d\vartheta_d \\
\vdots \\
-\sum_{i=1}^{n-1} m_{n..n}l_nl_i\vartheta_i^2S_{n,i} - m_{n..n}gl_n\sin\theta_n + \sigma_n - \lambda_n\vartheta_n
\end{bmatrix}
\tag{172}
$$

である。 □

[9] 確認のために $n=2$ として書き下すと、確かに式 (26),(27) に対応する。

[補足] ハミルトンの正準方程式の導出

ここで、運動エネルギー T **を以下のように表す。**

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{173}$$

但しここで、$\theta \in \mathbb{R}^n$ **である。すると、角運動量** $\boldsymbol{p}$ **は、**$\boldsymbol{p} = R\dot{\boldsymbol{\theta}}$ **と表される。ハミルトニアン** H **は**

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p} + U \tag{174}$$

であり、ハミルトニアン H **からハミルトンの正準方程式を得るには以下**

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p} + U\right) \\
&= R^{-1}\boldsymbol{p} && (175) \\
\dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p} + U\right) + \boldsymbol{F} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} && (176)
\end{aligned}$$

の関係式を用いればよい。ちなみに F **は、前述の抵抗や外力がある場合は、**

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sigma_d - \lambda_d\dot{\theta}_d \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{177}$$

さもなくば $F_d = 0(d = 1, \ldots, n)$ **である。**

具体的に求めると、ハミルトンの正準方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\theta}} &= R^{-1}\boldsymbol{p} && (178) \\
\dot{\boldsymbol{p}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{\partial R}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \ldots\right)^\top - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= \begin{bmatrix} \vdots \\ -\sum_{i=1}^{d-1} m_{d..n} l_d l_i \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i S_{d,i} - \sum_{i=d+1}^{n} m_{i..n} l_d l_i \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i S_{d,i} \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vdots \\ m_{d..n} g l_d \sin\theta_d \\ \vdots \end{bmatrix} + \boldsymbol{F} && (179)
\end{aligned}$$

□

[発展]　動座標系におけるラグランジュ運動方程式及びハミルトンの正準方程式の導出

O_1 **が時変の位置** $\boldsymbol{\Gamma} = (\Gamma_x, \Gamma_y)$ **によって動くことにより、振り子が強制振動される場合を考える。**i **番目の質点の位置ベクトルを** $\boldsymbol{r}_i = (x_{G_i}, y_{G_i})$ **として、この動座標系における運動エネルギー** T **は、**

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{r}}_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \dot{\boldsymbol{r}}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 \tag{180}$$

となり、位置エネルギー U **は、**

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i g y_{G_i} + \sum_{i=1}^{n} m_i g \Gamma_y \tag{181}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{\Gamma}}^\top \dot{\boldsymbol{r}}_i &= \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{\Gamma}_x, \dot{\Gamma}_y) \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{i} l_j \dot{\theta}_j \cos\theta_j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{i} l_j \dot{\theta}_j \sin\theta_j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \vdots \\ m_{i..n} l_i \left(\dot{\Gamma}_x \cos\theta_i + \dot{\Gamma}_y \sin\theta_i\right) \\ \vdots \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \vdots \\ \dot{\theta}_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \boldsymbol{p}_O^\top \dot{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned} \tag{182}$$

とおくと、ラグランジュ関数 L **は** $L = T - U$ **より、**

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R \dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{p}_O^\top \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 - U \tag{183}$$

となり、ラグランジュ運動方程式は、

$$R\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{R}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_O}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{F} \tag{184}$$

となる。但しここで、

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}_O}{\partial t} = \begin{bmatrix} \vdots \\ m_{i..n} l_i \left(\ddot{\Gamma}_x \cos\theta_i + \ddot{\Gamma}_y \sin\theta_i\right) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{185}$$

である。

この場合の角運動量 p は、$\boldsymbol{p} = R\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{p}_O$ であるので、$\dot{\boldsymbol{\theta}} = R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)$ より、ハミルトニアン H は、

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U \tag{186}$$

であり、ハミルトニアン H からハミルトンの正準方程式を得るには以下

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U\right\} \\
&= R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) \qquad (187) \\
\dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U\right\} + \boldsymbol{F} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left\{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)\right\} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= -\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top \frac{\partial R^{-1}}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{\partial (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top}{\partial \theta_1} R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O), \ldots\right)^\top - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= -\left(-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{\partial R}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial \boldsymbol{p}_O^\top}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \ldots\right)^\top - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}_O^\top \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \qquad (188)
\end{aligned}$$

の関係式を用いればよい。但しここで、

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}_O^\top \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) = \begin{bmatrix} \vdots \\ m_{i..n} l_i \left(-\dot{\Gamma}_x \sin\theta_i + \dot{\Gamma}_y \cos\theta_i\right)\dot{\theta}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{189}$$

である。

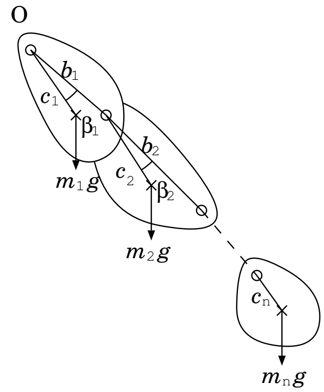
5　直列多重剛体振り子

(**問題**) n 個の剛体が直列に連結された多重剛体振り子 (Series-Multiple Rigid Pendulum) がある。これらは重力と逆向きの方向を y 軸とする xy 平面上で回転運動するものとする。剛体 1 は質量 m_1 で、原点 O に固定された回転軸 O_1 をもち、O_1 から剛体 1 の重心 G_1 までの距離を c_1 とする。また、剛体 1 の G_1 周りの慣性モーメントを I_{G_1} とする。

その他の剛体 $i(i=2,\dots n)$ は質量 m_i で、剛体 $i-1$ 上の O_{i-1} から距離 b_{i-1}、角度 $\angle G_{i-1}O_{i-1}O_i = \beta_{i-1}$ の回転軸 O_i をもち、O_i から剛体 i の重心 G_i までの距離を c_i とする。また、剛体 i の G_i 周りの慣性モーメントを I_{G_i} とする。

この多重剛体振り子のラグランジュ運動方程式を記述せよ。また、計算機シミュレーションなどをしやすいように、求められた 2 階常微分方程式を連立の 1 階常微分方程式に変換せよ。

また、この振り子が各々の角速度に比例する抵抗や外力を受けている場合においても同様に求めよ。



(**解答**) 剛体 $i(i=1,\dots,n)$ の y 軸に対する角度を θ_i とする。剛体 $i(i=1,\dots,n)$ の重心 G_i の座標 (x_{G_i}, y_{G_i}) およびその速度 V_{G_i} の 2 乗は、

$$x_{G_i} = \sum_{j=1}^{i-1} b_j \sin(\theta_j+\beta_j) + c_i \sin\theta_i \tag{190}$$

$$y_{G_i} = -\sum_{j=1}^{i-1} b_j \cos(\theta_j+\beta_j) - c_i \cos\theta_i \tag{191}$$

$$\begin{aligned} V_{G_i}^2 &= \dot{x}_{G_i}^2 + \dot{y}_{G_i}^2 \\ &= \left\{\sum_{j=1}^{i-1} b_j\dot{\theta}_j \cos(\theta_j+\beta_j) + c_i\dot{\theta}_i\cos\theta_i\right\}^2 + \left\{\sum_{j=1}^{i-1} b_j\dot{\theta}_j \sin(\theta_j+\beta_j) + c_i\dot{\theta}_i\sin\theta_i\right\}^2 \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} b_j^2\dot{\theta}_j^2 + c_i^2\dot{\theta}_i^2 + 2\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=j+1}^{i-1} b_jb_k\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k\cos(\theta_j+\beta_j-\theta_k-\beta_k) + 2\sum_{j=1}^{i-1} b_jc_i\dot{\theta}_j\dot{\theta}_i\cos(\theta_j+\beta_j-\theta_i) \end{aligned} \tag{192}$$

となる。ここで、剛体 $i(i=1,\dots,n)$ の運動エネルギー T_i および位置エネルギー U_i は、

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{2}I_{G_i}\dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2}m_iV_{G_i}^2 \\ &= \frac{1}{2}I_{G_i}\dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2}m_i\left(\sum_{j=1}^{i-1} b_j^2\dot{\theta}_j^2 + c_i^2\dot{\theta}_i^2\right) \\ &\quad + m_i\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=j+1}^{i-1} b_jb_k\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k\cos(\theta_j+\beta_j-\theta_k-\beta_k) + m_i\sum_{j=1}^{i-1} b_jc_i\dot{\theta}_j\dot{\theta}_i\cos(\theta_j+\beta_j-\theta_i) \end{aligned} \tag{193}$$

$$\begin{aligned} U_i &= m_igy_{G_i} \\ &= -m_ig\left\{\sum_{j=1}^{i-1} b_j\cos(\theta_j+\beta_j) + c_i\cos\theta_i\right\} \end{aligned} \tag{194}$$

となる。この多重剛体振り子のラグランジュ関数 L は、

$$
\begin{aligned}
L &= T - U \\
&= \sum_{i=1}^{n} T_i - \sum_{i=1}^{n} U_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} I_{G_i} \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} b_j^2 \dot{\theta}_j^2 + c_i^2 \dot{\theta}_i^2 \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \left\{ m_i \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j+1}^{i-1} b_j b_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos(\theta_j + \beta_j - \theta_k - \beta_k) + m_i \sum_{j=1}^{i-1} b_j c_i \dot{\theta}_j \dot{\theta}_i \cos(\theta_j + \beta_j - \theta_i) \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} m_i g \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} b_j \cos(\theta_j + \beta_j) + c_i \cos\theta_i \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(I_{G_i} + m_i c_i^2 \right) \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=1}^{i-1} b_j^2 \dot{\theta}_j^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j+1}^{i-1} b_j b_k \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \cos(\theta_j + \beta_j - \theta_k - \beta_k) + \sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=1}^{i-1} b_j c_i \dot{\theta}_j \dot{\theta}_i \cos(\theta_j + \beta_j - \theta_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} m_i g \sum_{j=1}^{i-1} b_j \cos(\theta_j + \beta_j) + \sum_{i=1}^{n} m_i g c_i \cos\theta_i \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(I_{G_i} + m_i c_i^2 + \sum_{k=i+1}^{n} m_k b_i^2 \right) \dot{\theta}_i^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ \sum_{k=i+1}^{n} m_k b_i b_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_i + \beta_i - \theta_j - \beta_j) + m_i b_j c_i \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_j + \beta_j - \theta_i) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \left\{ \sum_{k=j+1}^{n} m_k b_i b_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_i + \beta_i - \theta_j - \beta_j) + m_j b_i c_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_i + \beta_i - \theta_j) \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{k=i+1}^{n} m_k g b_i \cos(\theta_i + \beta_i) + m_i g c_i \cos\theta_i \right\}
\end{aligned}
\tag{195}
$$

となる。このラグランジュ関数 L から $\theta_d (d = 1, \ldots, n)$ に関するラグランジュ運動方程式をたてるには、以下の関係式を用いればよい。

$$
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_d} - \frac{\partial L}{\partial \theta_d} = 0
$$

これを具体的に求めると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_d} &= (I_{G_d} + m_d c_d^2 + m_{d+1..n} b_d^2) \dot{\theta}_d \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ d=i}}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ d=j}}^{i-1} \left\{ m_{i+1..n} b_i b_j \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_d} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j C_{i,j} + m_i b_j c_i \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_d} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \mathcal{C}_{j,i} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ d=i}}^{n} \sum_{\substack{j=i+1 \\ d=j}}^{n} \left\{ m_{j+1..n} b_i b_j \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_d} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j C_{i,j} + m_j b_i c_j \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_d} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \mathcal{C}_{i,j} \right\} \\
&= (I_{G_d} + m_d c_d^2 + m_{d+1..n} b_d^2) \dot{\theta}_d \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n} b_d b_i \dot{\theta}_i C_{d,i} + \sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n} b_d b_i \dot{\theta}_i C_{d,i} + \sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d \dot{\theta}_i \mathcal{C}_{i,d} + \sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i \dot{\theta}_i \mathcal{C}_{d,i}
\end{aligned}
\tag{196}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_d} &= (I_{G_d} + m_d c_d^2 + m_{d+1..n} b_d^2)\ddot{\theta}_d \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n} b_d b_i \left\{ \ddot{\theta}_i C_{d,i} - \dot{\theta}_i(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_i) S_{d,i} \right\} + \sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n} b_d b_i \left\{ \ddot{\theta}_i C_{d,i} - \dot{\theta}_i(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_i) S_{d,i} \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d \left\{ \ddot{\theta}_i \mathcal{C}_{i,d} + \dot{\theta}_i(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_i) \mathcal{S}_{i,d} \right\} + \sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i \left\{ \ddot{\theta}_i \mathcal{C}_{d,i} - \dot{\theta}_i(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_i) \mathcal{S}_{d,i} \right\} \\
&= (I_{G_d} + m_d c_d^2 + m_{d+1..n} b_d^2)\ddot{\theta}_d \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n} b_d b_i \ddot{\theta}_i C_{d,i} - \sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n} b_d b_i \dot{\theta}_i(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_i) S_{d,i} \\
&\quad + \sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n} b_d b_i \ddot{\theta}_i C_{d,i} - \sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n} b_d b_i \dot{\theta}_i(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_i) S_{d,i} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d \ddot{\theta}_i \mathcal{C}_{i,d} + \sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d \dot{\theta}_i(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_i) \mathcal{S}_{i,d} \\
&\quad + \sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i \ddot{\theta}_i \mathcal{C}_{d,i} - \sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i \dot{\theta}_i(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_i) \mathcal{S}_{d,i} \\
&= (I_{G_d} + m_d c_d^2 + m_{d+1..n} b_d^2)\ddot{\theta}_d \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n} b_d b_i \ddot{\theta}_i C_{d,i} - \sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n} b_d b_i \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i S_{d,i} + \sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n} b_d b_i \dot{\theta}_i^2 S_{d,i} \\
&\quad + \sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n} b_d b_i \ddot{\theta}_i C_{d,i} - \sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n} b_d b_i \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i S_{d,i} + \sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n} b_d b_i \dot{\theta}_i^2 S_{d,i} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d \ddot{\theta}_i \mathcal{C}_{i,d} + \sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i \mathcal{S}_{i,d} - \sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d \dot{\theta}_i^2 \mathcal{S}_{i,d} \\
&\quad + \sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i \ddot{\theta}_i \mathcal{C}_{d,i} - \sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i \mathcal{S}_{d,i} + \sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i \dot{\theta}_i^2 \mathcal{S}_{d,i} \qquad (197) \\
-\frac{\partial L}{\partial \theta_d} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ d=i}}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ d=j}}^{i-1} \left\{ m_{i+1..n} b_i b_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \frac{\partial}{\partial \theta_d} C_{i,j} + m_i b_j c_i \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \frac{\partial}{\partial \theta_d} \mathcal{C}_{j,i} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ d=i}}^{n} \sum_{\substack{j=i+1 \\ d=j}}^{n} \left\{ m_{j+1..n} b_i b_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \frac{\partial}{\partial \theta_d} C_{i,j} + m_j b_i c_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \frac{\partial}{\partial \theta_d} \mathcal{C}_{i,j} \right\} + m_{d+1..n} g b_d \sin(\theta_d + \beta_d) + m_d g c_d \sin\theta_d \\
&= \sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n} b_d b_i \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i S_{d,i} + \sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n} b_d b_i \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i S_{d,i} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i \mathcal{S}_{i,d} + \sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i \mathcal{S}_{d,i} + m_{d+1..n} g b_d \sin(\theta_d + \beta_d) + m_d g c_d \sin\theta_d \qquad (198)
\end{aligned}
$$

但しここで、

$$
\begin{aligned}
m_{k..l} &= \sum_{j=k}^{l} m_j \\
C_{i,j} &= \cos(\theta_i + \beta_i - \theta_j - \beta_j) = \cos(\beta_i - \beta_j)\cos(\theta_i - \theta_j) - \sin(\beta_i - \beta_j)\sin(\theta_i - \theta_j) \\
S_{i,j} &= \sin(\theta_i + \beta_i - \theta_j - \beta_j) = \sin(\beta_i - \beta_j)\cos(\theta_i - \theta_j) + \cos(\beta_i - \beta_j)\sin(\theta_i - \theta_j) \\
\mathcal{C}_{i,j} &= \cos(\theta_i + \beta_i - \theta_j) = \cos\beta_i \cos(\theta_i - \theta_j) - \sin\beta_i \sin(\theta_i - \theta_j) \\
\mathcal{S}_{i,j} &= \sin(\theta_i + \beta_i - \theta_j) = \sin\beta_i \cos(\theta_i - \theta_j) + \cos\beta_i \sin(\theta_i - \theta_j)
\end{aligned}
$$

ゆえに、$\theta_d (d = 1, \ldots, n)$ に関するラグランジュ運動方程式は、

$$\begin{aligned}
&(I_{G_d} + m_d c_d^2 + m_{d+1..n} b_d^2)\ddot{\theta}_d \\
&+ \sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n} b_d b_i \ddot{\theta}_i C_{d,i} + \sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n} b_d b_i \ddot{\theta}_i C_{d,i} + \sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d \ddot{\theta}_i \mathcal{C}_{i,d} + \sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i \ddot{\theta}_i \mathcal{C}_{d,i} \\
&+ \sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n} b_d b_i \dot{\theta}_i^2 S_{d,i} + \sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n} b_d b_i \dot{\theta}_i^2 S_{d,i} - \sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d \dot{\theta}_i^2 \mathcal{S}_{i,d} + \sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i \dot{\theta}_i^2 \mathcal{S}_{d,i} \\
&+ m_{d+1..n} g b_d \sin(\theta_d + \beta_d) + m_d g c_d \sin\theta_d = 0
\end{aligned} \tag{199}$$

となる[10]。 □

これを連立 1 階微分方程式にするために、この 2 階微分方程式を以下のように表す。

$$R\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{v} \qquad (R \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \ddot{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n) \tag{200}$$

さらに、

$$\vartheta_d = \dot{\theta}_d$$

とおくことにより以下の連立 1 階微分方程式を得る。

$$\dot{\theta}_d = \vartheta_d \tag{201}$$

$$\dot{\vartheta}_d = [R^{-1}\boldsymbol{v}]_d \tag{202}$$

但しここで、

$$R = \begin{pmatrix} I_{1..n} & & & & \\ & \ddots & & m_i b_d c_i \mathcal{C}_{d,i} + m_{i+1..n} b_d b_i C_{d,i} & \\ & & I_{d..n} & & \\ & m_d b_i c_d \mathcal{C}_{i,d} + m_{d+1..n} b_d b_i C_{d,i} & & \ddots & \\ & & & & I_{n..n} \end{pmatrix} \tag{203}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d \vartheta_i^2 \mathcal{S}_{i,d} - \sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i \vartheta_i^2 \mathcal{S}_{d,i} - m_d g c_d \sin\theta_d \\ - \sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n} b_d b_i \vartheta_i^2 S_{d,i} - \sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n} b_d b_i \vartheta_i^2 S_{d,i} - m_{d+1..n} g b_d \sin(\theta_d + \beta_d) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{204}$$

$$I_i = I_{G_i} + m_i c_i^2$$

$$I_{i..n} = I_i + m_{i+1..n} b_i^2$$

である。 □

[10] 確認のために $n = 2$ として書き下すと、確かに式 (16),(17) に対応する。

また、各々の角速度に比例する抵抗などの減衰や強制振動のような外力がある場合は、$\dot{\theta}_d(d=1,\ldots,n)$ それぞれに対する減衰定数を λ_d、外力を σ_d とすると、$\theta_d(d=1,\ldots,n)$ に関するラグランジュ運動方程式は式 (199) から、

$$\begin{aligned}
&(I_{G_d}+m_d c_d^2+m_{d+1..n}b_d^2)\ddot{\theta}_d \\
&+\sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n}b_d b_i\ddot{\theta}_i C_{d,i}+\sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n}b_d b_i\ddot{\theta}_i C_{d,i}+\sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d\ddot{\theta}_i \mathcal{C}_{i,d}+\sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i\ddot{\theta}_i \mathcal{C}_{d,i} \\
&+\sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n}b_d b_i\dot{\theta}_i^2 S_{d,i}+\sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n}b_d b_i\dot{\theta}_i^2 S_{d,i}-\sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d\dot{\theta}_i^2 \mathcal{S}_{i,d}+\sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i\dot{\theta}_i^2 \mathcal{S}_{d,i} \\
&+m_{d+1..n}g b_d\sin(\theta_d+\beta_d)+m_d g c_d\sin\theta_d=\sigma_d-\lambda_d\dot{\theta}_d
\end{aligned} \tag{205}$$

となる[11]。 □

よって、式 (201),(202) に対応する減衰や外力がある場合の連立一階微分方程式は以下のようになる。

$$\dot{\theta}_d = \vartheta_d \tag{206}$$

$$\dot{\vartheta}_d = [R^{-1}\boldsymbol{w}]_d \tag{207}$$

但しここで、

$$R = \begin{pmatrix} I_{1..n} & & & & \\ & \ddots & & m_i b_d c_i \mathcal{C}_{d,i}+m_{i+1..n}b_d b_i C_{d,i} & \\ & & I_{d..n} & & \\ & m_d b_i c_d \mathcal{C}_{i,d}+m_{d+1..n}b_d b_i C_{d,i} & & \ddots & \\ & & & & I_{n..n} \end{pmatrix} \tag{208}$$

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d \vartheta_i^2 \mathcal{S}_{i,d}-\sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i \vartheta_i^2 \mathcal{S}_{d,i}-m_d g c_d\sin\theta_d \\ -\sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n}b_d b_i\vartheta_i^2 S_{d,i}-\sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n}b_d b_i\vartheta_i^2 S_{d,i}-m_{d+1..n}g b_d\sin(\theta_d+\beta_d) \\ +\sigma_d-\lambda_d\vartheta_d \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{209}$$

である。 □

[11] 確認のために $n=2$ として書き下すと、確かに式 (26),(27) に対応する。

[補足]　ハミルトンの正準方程式の導出

ここで、運動エネルギー T **を以下のように表す。**

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{210}$$

但しここで、$\theta \in \mathbb{R}^n$ **である。すると、角運動量** $\boldsymbol{p}$ **は、**$\boldsymbol{p} = R\dot{\boldsymbol{\theta}}$ **と表される。ハミルトニアン** H **は**

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p} + U \tag{211}$$

であり、ハミルトニアン H **からハミルトンの正準方程式を得るには以下**

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p} + U\right) \\
&= R^{-1}\boldsymbol{p} && (212) \\
\dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p} + U\right) + \boldsymbol{F} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}^\top R^{-1}\boldsymbol{p}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} && (213)
\end{aligned}$$

の関係式を用いればよい。ちなみに F **は、前述の抵抗や外力がある場合は、**

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sigma_d - \lambda_d\dot{\theta}_d \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{214}$$

さもなくば $F_d = 0(d = 1, \ldots, n)$ **である。**

具体的に求めると、ハミルトンの正準方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\theta}} &= R^{-1}\boldsymbol{p} && (215) \\
\dot{\boldsymbol{p}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{\partial R}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \ldots\right)^\top - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= \begin{bmatrix} \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{d-1} m_d b_i c_d \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i \mathcal{S}_{i,d} - \sum_{i=d+1}^{n} m_i b_d c_i \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i \mathcal{S}_{d,i} \\ \displaystyle -\sum_{i=1}^{d-1} m_{d+1..n} b_d b_i \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i S_{d,i} - \sum_{i=d+1}^{n} m_{i+1..n} b_d b_i \dot{\theta}_d \dot{\theta}_i S_{d,i} \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vdots \\ m_d g c_d \sin\theta_d + m_{d+1..n} g b_d \sin(\theta_d + \beta_d) \\ \vdots \end{bmatrix} + \boldsymbol{F}
\end{aligned}$$

$$(216)$$

□

[発展]　動座標系におけるラグランジュ運動方程式及びハミルトンの正準方程式の導出

O_1 **が時変の位置** $\boldsymbol{\Gamma} = (\Gamma_x, \Gamma_y)$ **によって動くことにより、振り子が強制振動される場合を考える。**i **番目の質点の位置ベクトルを** $\boldsymbol{r}_i = (x_{G_i}, y_{G_i})$ **として、この動座標系における運動エネルギー** T **は、**

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{r}}_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^\top\dot{\boldsymbol{r}}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 \tag{217}$$

となり、位置エネルギー U **は、**

$$U = \sum_{i=1}^{n} m_i g y_{G_i} + \sum_{i=1}^{n} m_i g \Gamma_y \tag{218}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^\top\dot{\boldsymbol{r}}_i &= \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\Gamma}_x, \dot{\Gamma}_y)\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{i-1} b_j\dot{\theta}_j\cos(\theta_j+\beta_j) + c_i\dot{\theta}_i\cos\theta_i \\ \sum_{j=1}^{i-1} b_j\dot{\theta}_j\sin(\theta_j+\beta_j) + c_i\dot{\theta}_i\sin\theta_i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \vdots \\ m_{i+1..n}b_i\left(\dot{\Gamma}_x\cos(\theta_i+\beta_i) + \dot{\Gamma}_y\sin(\theta_i+\beta_i)\right) + m_i c_i\left(\dot{\Gamma}_x\cos\theta_i + \dot{\Gamma}_y\sin\theta_i\right) \\ \vdots \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \vdots \\ \dot{\theta}_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \boldsymbol{p}_O^\top\dot{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned} \tag{219}$$

とおくと、ラグランジュ関数 L **は** $L = T - U$ **より、**

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{p}_O^\top\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i|\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 - U \tag{220}$$

となり、ラグランジュ運動方程式は、

$$R\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{R}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial \boldsymbol{p}_O}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R\dot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{F} \tag{221}$$

となる。但しここで、

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}_O}{\partial t} = \begin{bmatrix} \vdots \\ m_{i+1..n}b_i\left(\ddot{\Gamma}_x\cos(\theta_i+\beta_i) + \ddot{\Gamma}_y\sin(\theta_i+\beta_i)\right) + m_i c_i\left(\ddot{\Gamma}_x\cos\theta_i + \ddot{\Gamma}_y\sin\theta_i\right) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{222}$$

である。

この場合の角運動量 p は、$\boldsymbol{p} = R\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{p}_O$ であるので、$\dot{\boldsymbol{\theta}} = R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)$ より、ハミルトニアン H は、

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U \tag{223}$$

であり、ハミルトニアン H からハミルトンの正準方程式を得るには以下

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U\right\} \\
&= R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) \qquad (224) \\
\dot{\boldsymbol{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i |\dot{\boldsymbol{\Gamma}}|^2 + U\right\} + \boldsymbol{F} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left\{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)\right\} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= -\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top \frac{\partial R^{-1}}{\partial \theta_1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O) + \frac{\partial (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O)^\top}{\partial \theta_1} R^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_O), \ldots\right)^\top - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= -\left(-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top \frac{\partial R}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial \boldsymbol{p}_O^\top}{\partial \theta_1}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \ldots\right)^\top - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}^\top R \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}_O^\top \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{F} \qquad (225)
\end{aligned}$$

の関係式を用いればよい。但しここで、

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{p}_O^\top \dot{\boldsymbol{\theta}}\right) = \begin{bmatrix} \vdots \\ m_{i+1..n} b_i \left(-\dot{\Gamma}_x \sin(\theta_i + \beta_i) + \dot{\Gamma}_y \cos(\theta_i + \beta_i)\right)\dot{\theta}_i + m_i c_i \left(-\dot{\Gamma}_x \sin\theta_i + \dot{\Gamma}_y \cos\theta_i\right)\dot{\theta}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{226}$$

である。

改訂履歴

初版 この文献は、1996 年 4 月東京電機大学で行なった非線形関連のセミナーでの配布資料として執筆したものであり、多重振り子の教材として好評なカオス人形 (通称カオスマン、商品名ペンダモニウム) の操作シミュレータの技術資料です。ちなみにその後、このコンピュータシミュレーションは放送大学の授業で使用しています。

第二版 初版で扱っていた並列の多重剛体振り子に加えて、ポピュラーな直列の多重剛体振り子についての導出を追加しました。

第三版 それぞれの振り子について、ハミルトニアンの正準方程式も添えました。また、1 番目の振り子の支点の座標が時間によって変動することにより強制振動される場合についての運動方程式の導出を加えました。

謝辞

初期の段階で、2 重剛体振り子の初歩について、村重 淳 氏の御指導を頂きました。

参考文献

[1] Nikolaus Rott, “A Multiple Pendulum for the Demonstration of Non-Linear Coupling,” ZAMP, Vol.21, pp. 570–582, 1970.

[2] P. H. Richter & H.-J. Scholz, “Chaos in Classical Mechanics: The Double Pendulum,” in “Stochastic Phenomena and Chaotic Behavior in Complex Systems (Ed. P. Schuster),” Springer, Berlin, pp. 86–97, 1984.

[3] Daniel R. Stump, “Solving classical mechanics problems by numerical integration of Hamilton’s equations,” Am. J. Phys., 54, 12, pp. 1096–1100, December 1986.

[4] M. E. Henderson, M. Levi & F. Odeh, “The Geometry and Computation of the Dynamics of Coupled Pendula,” International Journal of Bifurcation and Chaos, 1, 1, pp. 27–50, 1991.

[5] Troy Shinbrot, Celso Grebogi, Jack Wisdom & James A. Yorke, “Chaos in a Double Pendulum,” Am. J. Phys., 60, 6, pp. 491–499, June 1992.

[6] A. C. Skeldon, “Dynamics of a Parametrically Excited Double Pendulum,” Physica D, 75, pp. 541–558, 1994.

[7] D. Acheson, “From Calculus to Chaos — An Introduction to Dynamics,” Oxford University Press, New York, 1997.

[8] 有本 卓, “ロボットの力学と制御,” システム制御情報学会 編, 朝倉書店, November 1990.

[9] 長島 弘幸, 馬場 良和, “カオス入門 — 現象の解析と数理,” 培風館, July 1992.

[10] 下條 隆嗣, “カオス力学入門,” シミュレーション物理学 6, 近代科学社, September 1992.

[11] 合原 一幸 編著, “応用カオス,” サイエンス社, June 1994.

[12] 合原 一幸, “カオスの数理と技術 — カオス，そしてフラクタル， 複雑系への序章,” , 放送大学教育振興協会, March 1997.

[13] 合原 一幸, “カオス学入門,” 放送大学教育振興協会, March 2001.

[14] 有本 卓, “新版 ロボットの力学と制御,” システム制御情報学会 編, 朝倉書店, March 2002.